

Control 3

Miércoles 5 de Noviembre, 2003

Problema 2

Problema:

$$\text{máx } Z = 4X_1 + 2X_2 + 3X_3$$

s.a :

$$\begin{array}{rcl} \frac{5}{17}X_1 - \frac{14}{17}X_2 - \frac{1}{17}X_3 & \leq & \frac{35}{17} \\ \frac{2}{17}X_1 - \frac{8}{17}X_2 + \frac{3}{17}X_3 & \leq & \frac{31}{17} \\ X_1, X_2, X_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Este problema se ha resuelto como minimización y su forma canónica óptima es la siguiente:

$$\text{máx } Z = 47 - 2X_2 - 6X_4 - 19X_5$$

s.a :

$$\begin{array}{rcl} X_1 - 2X_2 + 3X_4 + X_5 & = & 8 \\ +4X_2 + X_3 - 2X_4 + X_5 & = & 5 \end{array}$$

Además se sabe que la matriz básica en el óptimo es tal que:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Con estos antecedentes se pide responder:

- Suponga que $c_1 = 4$ se cambia a $c'_1 = 3$. Analice si cambia o no la solución óptima del problema. En caso afirmativo encuentre la nueva solución óptima. Determine además si cambia o no el vector de precios sombra (π). En caso afirmativo encuentre los valores.

Solución: La forma canónica nos entrega las variables básicas del problema primal, que son aquellas que tienen costo reducido igual a 0. En este caso son las variables X_1 y X_3 . Otra forma de darse cuenta de esto, si no se entiende la forma canónica, es invirtiendo la matriz B^{-1} , obteniendo B , que corresponde a las columnas de la matriz A de las variables bsicas del problema original.

Entonces al cambiar c_1 estamos cambiando el costo de un avariable básica. Luego hay que verificar si se sigue cumpliendo el criterio de óptimalidad para las variables no básicas. Esto es que $\bar{c}_j \leq 0 \forall j$ no básico, ya que el primal es un pronlema de maximizacion

Los nuevos costos modificados serán (sobre las variables no básicas X_2, X_4, X_5):

$$\bar{c}_j = c_j - c_B B^{*-1} A_{\bullet j}$$

$$\bar{c}_2 = c_2 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 2} = -2 - \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-14}{17} \\ \frac{8}{17} \end{pmatrix} = -8 \leq 0$$

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 4} = 0 - \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \leq 0$$

$$\bar{c}_5 = c_5 - c_B B^{*-1} A_{\bullet 5} = 0 - \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -18 \leq 0$$

Luego, a pesar del cambio que se produce en el costo asociado a la variable básica X_2 , el óptimo sigue manteniéndose, para el problema.

El vector de precios sombra se cambia. Este nuevo vector es:

$$\pi_i = c_B B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

2. Suponga que $b_1 = \frac{35}{17}$ se cambia por $b'_1 = 1$ analice si cambia o no la solución óptima. En caso afirmativo encuentre la nueva solución óptima.
Determine además el rango de variación de b_1 para que los precios sombra se mantengan.

Solución: La solución óptima si cambia a:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{31}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{82}{17} \\ \frac{121}{17} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que los precios sombras pueden ser calculados como $y^* = \pi^* = c_B B^{*-1}$. Como en este caso no se está modificando ningún costo del problema original, la única forma en que el valor de algún precio sombra puede variar es cambiando la base óptima. Para asegurar que seguimos estando en el mismo óptimo, y entonces no cambia la base, solamente se necesita asegurar que seguimos estando en un punto factible en el problema primal, lo cual se asegura haciendo que $\bar{b} = B^{-1}b$ cumpla con la condición de naturaleza de variables explicitada en el problema, las que en este caso corresponde a $x_j \geq 0$ para todo j .

Ahora, veamos cual es el rango en que puede variar b_1 para que sigamos estando en el mismo óptimo:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \frac{31}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_1 + \frac{31}{17} \\ -2b_1 + \frac{155}{17} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, el rango de variación de b_1 para que no cambie la base óptima es $b_1 \in \left[\frac{-31}{51}, \frac{155}{34} \right]$