



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Optimización
Profesor: Guillermo Durán
Auxiliar: Giovanni Medina

Control 3

Miércoles 9 de Junio, 2004

Problema 1

1. Sea un PL estándar

$$\begin{aligned} (\text{PL}) \quad & \text{mín} \quad z = c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Con base óptima B^* .

- (1 punto) Suponga que se modifica un coeficiente c_k de la función objetivo. Qué costos reducidos deben ser analizados para saber si B^* sigue siendo base óptima? Justifique.
 - (1 punto) Suponga que al modificar c_k la base óptima cambia. Qué estrategia utilizaría para encontrar el nuevo óptimo? Justifique su elección.
2. Sea un PL estándar como en la parte (1), con base óptima B^* y punto óptimo x^* .
- (1 punto) Suponga que se modifica un coeficiente b_j del vector de lado derecho. Por qué se debe analizar $B^{*-1}b$ para determinar que no varía la base óptima?
 - (0,5 puntos) Si la base B^* sigue siendo óptima al modificar b_j , implica que x^* no cambia? Justifique.
 - (1 punto) Suponga que al modificar b_j la base óptima cambia. Qué estrategia utilizaría para encontrar el nuevo óptimo? Justifique su elección.
3. (1 punto) Explique en que condiciones se decide no ramificar un nodo en el algoritmo de Branch and Bound utilizado para resolver un problema de programación entera.
4. (0,5 puntos) Suponga que tiene que resolver un problema lineal y un problema entero. En caso de no contar con más información a priori, cuál de los dos diría usted que es más difícil de resolver? Justifique.

Problema 2

Don King acaba de abandonar su posición académica en el Departamento de Ingeniería Industrial para asumir como intendente de Santiago. Quiere aprovechar todos sus conocimientos en programación matemática para congraciarse con los estudiantes de la ciudad (y con sus padres). Para ello ha decidido relocalizar todos los colegios de modo de hacer mas cómoda la movilidad de los alumnos.

La ciudad se puede dividir en I distritos, en que cada uno contiene p_i alumnos. Análisis preliminares (estudios de terrenos, factores políticos, etc.) han establecido que las escuelas sólo pueden ser ubicadas en J sitios predeterminados dentro de la ciudad.

Sea $d_{ij} \geq 0$ la distancia desde el centro del distrito i hasta el sitio j . Se deben seleccionar los sitios en los cuales construir un colegio (en un sitio cabe a lo más uno) y además se debe asignar un colegio a cada

distrito. Es decir, cada distrito de la ciudad debe tener uno (y sólo un) colegio asociado. Un colegio puede tener más de un distrito asociado.

Construir un colegio en el sitio j tiene un costo fijo asociado igual a c_j . Existe también un costo variable que es linealmente proporcional (la constante de proporcionalidad es f) a la cantidad total de alumnos que debe servir el colegio. O sea, si se construye un colegio en el sitio j , entonces el costo asociado es $c_j + fs_j$, en que s_j es la población total que debe servir el colegio ubicado en j (es la suma de las poblaciones de todos los distritos asociados a ese colegio).

La capacidad de alumnos que soporta un colegio construido en el sitio j es un dato conocido (T_j).

El presupuesto total destinado para construir los colegios es igual a B y no debe ser sobrepasado.

Además, La Dirección de Educación de la ciudad ha determinado que los distritos s y t deben ser atendidos por el mismo colegio, y que los distritos u , v y w deben ser atendidos por 3 colegios distintos.

Ayude a Don King a aumentar su popularidad formulando un modelo de programación lineal entera que, respetando las condiciones planteadas, determine donde construir los colegios y que colegio atiende a que distrito. El objetivo es minimizar la distancia máxima entre el centro de un distrito y su respectivo colegio.

Problema 3

Se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= 20x_1 + 10x_2 + 30x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 150 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \leq 100 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 120 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Se sabe que al resolver el problema como un problema de minimización con simplex los costos reducidos en el óptimo valen $\bar{c}_1 = 0$, $\bar{c}_2 = 0$, $\bar{c}_3 = 0$, $\bar{c}_4 = 21$, $\bar{c}_5 = 7$ y $\bar{c}_6 = 2$, Con x_4 , x_5 y x_6 las variables de holgura de la primera, segunda y tercera restricción respectivamente.

A partir de estos datos se le pide responder a las siguientes preguntas:

- (1 punto) Determine el punto óptimo y el valor de la función objetivo en este punto.
- (2,5 puntos) Suponga que $c_2 = 10$ cambia a $c'_2 = -10$. Analice si cambia o no la solución óptima del problema. En caso afirmativo encuentre la nueva solución óptima. Determine además si cambia o no el vector de precios sombra (π). En caso afirmativo encuentre sus nuevos valores. Por último determine el rango de variación de c_2 para que el óptimo no cambie.
- (2,5 puntos) Suponga que simultáneamente se cambia $b_1 = 150$ por $b'_1 = 100$ y $b_2 = 100$ por $b'_2 = 50$. Analice si cambia o no la solución óptima. En caso afirmativo encuentre la nueva solución óptima. Determine además el rango de variación de b_1 en función de b_2 para que los precios sombra se mantengan y verifique si el cambio realizado anteriormente ($b'_1 = 100$ y $b'_2 = 50$) cumple las condiciones encontradas por usted.

Matrices Básicas Inversas: Para sus cálculos se le entregan las siguientes matrices básicas inversas:

$$\begin{aligned} \text{VB: } x_1, x_2, x_3 \Rightarrow B^{-1} &= \begin{bmatrix} 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & -0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} & \text{VB: } x_4, x_5, x_6 \Rightarrow B^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{VB: } x_1, x_2, x_5 \Rightarrow B^{-1} &= \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & -0,2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{VB: } x_2, x_3, x_4 \Rightarrow B^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pauta

Problema 1

1. .
 - a) Si la variable x_k no es básica, la modificación de c_k sólo afecta a \bar{c}_k . En cambio si la variable x_k es básica, la modificación afecta a todos los costos reducidos de las variables no básicas.
 - b) Se debe aplicar el algoritmo Simplex a partir de la base óptima del problema original. El punto óptimo es factible para el nuevo problema porque no fue modificado nada del conjunto de restricciones.
2. .
 - a) Se debe analizar si $B^{*-1}b \geq 0$, ya que al hacerse este valor negativo para alguna de sus componentes el óptimo deja de ser factible.
 - b) Falso. El punto óptimo cambia porque es dependiente del vector de lado derecho.
 - c) Se debe aplicar el Simplex en el dual del problema original partiendo del óptimo de dicho dual. No puedo partir del óptimo del primal porque el punto dejo de ser factible. En su defecto, también se podría partir haciendo fase I desde la base anterior para encontrar un nuevo punto factible y luego el nuevo óptimo.
3. 3 condiciones:
 - El nodo generó un problema infactible.
 - La solución del problema en ese nodo es entera.
 - La solución del problema en ese nodo es fraccionaria pero es “peor” que alguna entera que ya ha sido obtenida (el valor de la incumbente).
4. El problema lineal es más fácil que el entero. De hecho el problema lineal es polinomial y el entero es NP-completo. Otra explicación podría ser que en el problema lineal sabemos que el óptimo está en un vértice, lo que facilita su resolución.

Problema 2

1. Variables de Decisión: (0,5 pts cada una)
 - x_j : 1 si se construye un colegio en el sitio j . 0 en cualquier otro caso
 - y_{ij} : 1 si el distrito i es asignado al colegio ubicado en el sitio j . 0 en cualquier otro caso
 - z : Máxima distancia entre un distrito y una bomba

2. Restricciones:

- a) Cada distrito debe ser asignado a un solo colegio (0,5 pts).

$$\sum_j y_{ij} = 1 \quad \forall i$$

- b) Solo se puede asignar distrito i a colegio en sitio j si está contruido (0,5 pts).

$$y_{ij} \leq x_j \quad \forall i, j$$

c) Respetar presupuesto (0,5 pts).

$$\sum_j (x_j c_j + f \sum_i y_{ij} p_i) \leq B$$

d) Capacidad máxima de alumnos por colegio (0,5 pts).

$$\sum_i y_{ij} p_i \leq T_j \quad \forall j$$

e) Distritos s y t en el mismo colegio (0,5 pts).

$$y_{sj} = y_{tj} \quad \forall j$$

f) Distritos u , v y w en distintos colegios (0,5 pts).

$$y_{uj} + y_{vj} + y_{wj} \leq 1 \quad \forall j$$

g) Establecer la máxima distancia recorrida (0,5 pts).

$$z \geq y_{ij} d_{ij} \quad \forall i, j$$

h) Naturaleza de las variables (0,5 pts).

$$x_i, y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$$

$$z \geq 0$$

3. Función Objetivo: (0,5 pts)

Minimizar la maxima distancia entre una bomba y su distrito asociado.

$$\text{mín } z$$

Nota de Corrección: De modelar el problema de una forma distinta (por lo general más extensa por poner más variables) vea cuantas restricciones y variables tiene en total el modelo correcto y divida las 60 décimas en el numero total de variables, restricciones y fn objetivo, asignando ese puntaje a cada item correcto.

Problema 3

1. Al llevar el problema a su forma estandar tenemos:

$$\begin{aligned} \text{mín } z &= -20x_1 - 10x_2 - 30x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 150 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 100 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_6 = 120 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Luego, como sabemos que en simplex necesariamente los costos reducidos de las variables básicas vale 0, ya que:

$$\bar{c}_B = c_B - c_B B^{*-1} B = 0$$

Luego x_4 , x_5 y x_6 son no básicas ya que sus costos reducidos son distintos de cero, por lo que la base está compuesta por x_1 , x_2 y x_3 . Luego la base es:

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow B^{*-1} = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & -0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, para calculamos el óptimo:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & -0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 125 \end{pmatrix}$$

El valor de la función objetivo viene dado por $z = -20 \cdot 9 - 10 \cdot 16 - 30 \cdot 125 = -180 - 160 - 3750 = -4090$.

Nota de Corrección: Adicionalmente se puede colocar que las variables de holgura valen 0, pero basta con los datos anteriores. Además se puede concluir que z vale 4090 visto desde el problema de maximización, lo cual también está correcto.

2. Vemos que x_2 es variable no básica, por lo que al variar c_2 nos debemos fijar en el costo reducido asociado a todas las variables no básicas:

$$\bar{c}_j = c_j - c_B B^{*-1} A_{.j}$$

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B B^{*-1} A_{.4} = 0 - (-20 \quad 10 \quad -30) \begin{bmatrix} 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & -0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 13 \geq 0$$

$$\bar{c}_5 = c_5 - c_B B^{*-1} A_{.5} = 0 - (-20 \quad 10 \quad -30) \begin{bmatrix} 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & -0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 11 \geq 0$$

$$\bar{c}_6 = c_6 - c_B B^{*-1} A_{.6} = 0 - (-20 \quad 10 \quad -30) \begin{bmatrix} 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & -0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \geq 0$$

Luego vemos que la solución sigue siendo óptima.

Como se ha variado un costo básico y el precio sombra es:

$$\pi = c_B B^{*-1}$$

Luego los nuevos precios sombra son:

$$\pi = c_B B^{*-1} = (-20 \quad 10 \quad -30) \begin{bmatrix} 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & -0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} = (-13 \quad -11 \quad -6)$$

Veamos el rango de variación para c_2 :

$$\bar{c}_4 = c_4 - c_B B^{*-1} A_{.4} = 0 - (-20 \quad c_2 \quad -30) \begin{bmatrix} 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & -0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 0,4c_2 + 15 \geq 0 \Rightarrow c_2 \leq 42,5$$

$$\bar{c}_5 = c_5 - c_B B^{*-1} A_{.5} = 0 - (-20 \quad c_2 \quad -30) \begin{bmatrix} 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & -0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -6 + 0,2c_2 + 15 \geq 0 \Rightarrow c_2 \geq -45$$

$$\bar{c}_6 = c_6 - c_B B^{*-1} A_{.6} = 0 - (-20 \quad c_2 \quad -30) \begin{bmatrix} 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & -0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + 0,2c_2 \geq 0 \Rightarrow c_2 \geq -20$$

Luego se debe cumplir que $c_2 \in [-20; 42,5]$ para que el óptimo no varíe desde el punto de vista del problema de minimización. También se puede colocar desde el punto de vista de maximización, quedándonos $c_2 \in [-42,5; 20]$ (ambas están correctas).

Nota de Corrección: 0,6 puntos por verificar que al variar c_2 la solución sigue siendo óptima, 0,7 puntos por encontrar los nuevos precios sombra y 0,7 puntos por encontrar el rango de variación de c_2 .

3. La solución óptima si cambia a:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & -0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 6 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}$$

$$x_4^* = x_5^* = x_6^* = 0$$

Por otra parte, sabemos que los precios sombras pueden ser calculados como $y^* = \pi^* = c_B B^{*-1}$. Como en este caso no se está modificando ningún costo del problema original, la única forma en que el valor de algún precio sombra puede variar es cambiando la base óptima. Para asegurar que seguimos estando en el mismo óptimo, y entonces no cambia la base, solamente se necesita asegurar que seguimos estando en un punto factible en el problema primal, lo cual se asegura haciendo que $\bar{b} = B^{-1}b$ cumpla con la condición de naturaleza de variables explicitada en el problema, las que en este caso corresponde a $x_j \geq 0$ para todo j .

Ahora, veamos cual es el rango en que puede variar b_1 para que sigamos estando en el mismo óptimo: Ya teníamos que

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & -0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 120 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 0,1b_1 - 0,3b_2 + 24 \geq 0 \\ 0,4b_1 - 0,2b_2 - 24 \geq 0 \\ 0,5b_1 + 0,5b_2 \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} b_1 \geq 3b_2 - 240 \\ b_1 \geq 0,5b_2 + 60 \\ b_1 \geq -b_2 \end{array}$$

Estas 3 condiciones se deben cumplir a la vez. Luego para que el precio sombra b_1 debe cumplir con las 3 desigualdades anteriores dependiendo del valor de b_2 .

Verifiquemos que el cambio cumple la condición:

$$100 \geq 3 \cdot 50 - 240 = -90 \quad \text{OK}$$

$$100 \geq 0,5 \cdot 50 + 60 = 85 \quad \text{OK}$$

$$100 \geq -50 \quad \text{OK}$$

Nota de Corrección: 1 punto por encontrar el nuevo óptimo al cambiar b_1 y b_2 por b'_1 y b'_2 respectivamente, 1 punto por determinar el rango de variación de b_1 en función de b_2 para que no varíen los precios sombra y 0,5 puntos por verificar que cumple las condiciones.

Dudas y/o Consultas:
Giovanni Medina Reyes
gmedina@ing.uchile.cl