

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Clase Auxiliar
Simplex

Marcel Goic F.¹

¹Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografía y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@ing.uchile.cl

1. Una brevísima introducción.

El óptimo de un problema lineal (si existe) está en un vértice del poliedro factible o en los infinitos puntos que forman la arista que une dos de ellos en el caso de infinitas soluciones. De ahí la importancia de contar con un algoritmo que examine el valor de la función objetivo en dichos vértices, recorriéndolo de una forma (empíricamente) eficiente. Este es el papel que juega simplex. Examinaremos el algoritmo simplex, partiendo por la forma canónica usando ecuaciones para luego revisar la forma matricial y de tablas. Además veremos la fase I del algoritmo que nos servirá para encontrar una vertice inicial del espacio de soluciones factibles, requerimiento fundamental en el desarrollo del algoritmo.

2. Ese trabalenguas llamado base...

Queremos resolver un problema en la forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^t \cdot x \\ \text{s.a} & A \cdot x = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

El algoritmo simplex es iterativo. Supongamos que disponemos de m restricciones y n variables². Queremos poder representar fácilmente vértices del poliedro factible, lo que en la forma estándar es bastante fácil: basta con escoger m variables iguales a cero. En efecto, fijar una variable igual a cero significa que estamos haciendo activa una restricción: ya sea la de no negatividad si es variable original o la restricción que le dió origen si es variable de holgura y por tanto si fijamos m de ellas como nulas tendremos un vértice del espacio factible. A las m variables que fijamos nulas las llamaremos variables **no básicas** y las otras (las que determinamos resolviendo el sistema resultante) son las variables **básicas**. En cada iteración lo que haremos es movernos a un vértice adyacente al actual haciendo que una variable no básica deje de serlo (dejamos que aumente su valor) y viendo cual es la variable básica que primero se anula (se hace no básica).

Matricialmente, lo anterior puede verse como que en cada iteración escogeremos m columnas de A (asociadas a m variables), formando una submatriz cuadrada B , matriz básica. Las columnas restantes se agrupan en otra submatriz R , matriz no básica. Las variables asociadas a las columnas de B son las variables básicas y las agruparemos en un subvector x_B . Del mismo modo, las variables asociadas a las columnas de R son las variables no básicas y las agruparemos en un subvector de x que llamaremos x_R . Si le asignamos arbitrariamente el valor 0 a todas las componentes del vector x_R , tendremos una solución básica ($x_R := 0$).

Para poder realizar el proceso iterativo, debemos ser capaces de respondernos en cada iteración:

²Para tener un problema que optimizar, es decir, para que exista un espacio de soluciones factibles mayor que un solo punto, debe tenerse que $n > m$ (restricciones l.i)

1. ¿Es óptima la solución?
2. ¿Que variable x_s debe entrar a la base?
3. ¿Que variable x_r debe salir de la base (dado que entra x_s)?

3. Los señores optimizantes no se ponen de acuerdo

Si bien el principio es siempre el mismo, existen varias formas de escribirlo y en cada una de ellas las condiciones de optimalidad, los criterios de entrada y salida de la base varían en su forma (no en su fondo).

En clases de cátedra vieron varias formas con probabilidad $\rightarrow 1$, discutiendo el trasfondo matemático que hay detrás de cada criterio por lo que no me extenderé mayormente aquí. Sin embargo, adjunto un resumen del algoritmo con la forma que toma simplex por medio de tablas y matricial.

3.1. Simplex usando ecuaciones

Esta versión del algoritmo trabaja con un sistema de $(m+1)$ ecuaciones: las m ecuaciones de las restricciones mas una ecuación correspondiente a la función objetivo. Para aplicar los criterios de optimalidad, entrada y salida de la base debemos tener una forma canónica. Para formar cada forma canónica exigiremos 2 cosas:

- Que los coeficientes que acompañan a las variables básicas en la ecuación correspondiente a la función objetivo sean todos nulos.
- Que los coeficientes que acompañan a las variables básicas en las ecuaciones de restricciones correspondan a un vector canónico, formando así una base de \mathbb{R}^m . En otras palabras, cada variable básica debe aparecer en sólo una restricción y acompañada de un coeficiente 1.

Para lograr esto, debemos hacer operaciones elementales sobre las ecuaciones: ponderar ecuaciones por un escalar y sumar restricciones.

Una vez lograda una forma canónica mediante la aplicación de estas operaciones elementales, esta forma canónica tiene la siguiente gracia:

- Los coeficientes que quedan acompañando a las variables no básicas en la ecuación de función objetivo son los costos reducidos (\bar{c}_R) asociados a dichas variables.
- Los coeficientes que quedan acompañando a las variables en las ecuaciones de restricciones corresponden a $\bar{A} = B^{-1} \cdot A$, es decir el coeficiente que acompaña a la variable j en la restricción i corresponde a \bar{a}_{ij}

- Los lados derechos de las restricciones corresponden a los valores que toman las variables básicas en el vértice en curso.
- el lado derecho de la ecuación correspondiente a la función objetivo es el valor que toma la función objetivo evaluada en el vértice en curso.

Los criterios a utilizar en cada iteración:

- 1) **Criterio de optimalidad:** La solución en curso es óptima si $\bar{c}_j \geq 0 \forall x_j$ no básico.
- 2) **Criterio de entrada:** Entrará la variable x_s tal que $\bar{c}_s = \min\{\bar{c}_j | \bar{c}_j < 0\}$.
- 3) **Criterio de salida:** Saldrá la variable x_r tal que $\frac{\bar{b}_r}{a_{rs}} = \min_{a_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{a_{is}} \right\}$

Notar que la existencia de costos reducidos ≤ 0 nos dice que se puede aumentar el valor de una variable no básica (de modo que pasa a básica), disminuyendo el valor de la función objetivo. Esta disminución será de \bar{c}_i por cada unidad que aumentemos de la variable x_i . De este modo, podemos elegir cualquier variable x_i para que entre a la base, siempre y cuando cumpla que $\bar{c}_i \leq 0$. Por convención se escoge la que sea mas negativa porque intuitivamente mejora *mas rápido* la función objetivo.

3.2. Simplex usando matrices

En este caso, los criterios y el razonamiento matemático es el mismo. La única diferencia radica en como se almacena la información y en el tipo de operaciones que debemos realizar para llegar a una forma canónica que nos permita aplicar los criterios de optimalidad, entrada y salida de la base:

Consideremos el problema matricial

$$\begin{aligned} \text{mín } z &= c^t \cdot x \\ \text{s.a } A \cdot x &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Si escogemos nuestras variables básicas (y por añadidura las no básicas) tendremos:

$$\begin{aligned} \text{mín } z &= c_B x_B + c_R x_R \\ \text{s.a } B x_B + R x_R &= b \\ x_B, x_R &\geq 0 \end{aligned}$$

Llamando $\bar{b} = B^{-1}b$ y $\bar{R} = B^{-1}R$ tendremos:

$$\text{mín } z = c_B x_B + c_R x_R$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & x_B = \bar{b} - \bar{R}x_R \\ & x_B, x_R \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{mín } z = c_B(\bar{b} - \bar{R}x_R) + c_R x_R$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & x_B = \bar{b} - \bar{R}x_R \\ & x_B, x_R \geq 0 \end{aligned}$$

Llamando $\bar{c}_R = c_R - c_B \bar{R}$ y haciendo $x_R = 0$ tendremos finalmente:

$$\begin{aligned} \text{mín } z &= c_B \bar{b} + \bar{c}_R x_R \\ \text{s.a. } & x_B = \bar{b} \\ & x_B, x_R \geq 0 \end{aligned}$$

En cada iteración haremos esto mismo, pero para distintas bases (distintas variables en la base). Luego, si en una iteración cualquiera la base no es óptima, intentaremos sacar una variable de la base para que ingrese otra que no estaba en la base, obteniendo así una nueva base con la cual continuar el proceso iterativo.

4. Fase I del algoritmo Simplex.

Para iniciar el proceso iterativo, simplex necesita un vértice (base) factible inicial. Si en los coeficientes del problema original aparece una identidad y todos los lados derechos tenemos una base factible inicial trivial: la correspondiente a las variables que forman la identidad³.

Sin embargo, en muchos casos esto no ocurre, por lo que tenemos que disponer de un método para hallar soluciones básica factibles si las hay. Esto consiste en agregar tantas variables **artificiales** como sea necesario para formar una identidad y luego resolver un problema de optimización consistente en tratar de que dichas variables artificiales se hagan nulas y por tanto se puedan eliminar. Para ello tratamos de minimizar la suma de variables artificiales:

- Si la suma óptima de variables artificiales es no nula significa que alguna variable artificial es positiva y por tanto no la podemos eliminar. En dicho caso, el problema es infactible.
- Si la suma óptima de variables artificiales es nula significa que todas las variables artificiales son nulas y por tanto las podemos eliminar obteniendo un vértice factible:

³típicamente las variables de holgura

- Si ninguna variable artificial está en la base óptima de fase I, entonces tomamos dicha base como vértice inicial para la fase II.
- Si existen variables artificiales en la base óptima de fase I, entonces podemos intentar reemplazarla por cualquier variable no básica para formar una base factible para la fase II.

5. Problemas

5.1. Problema 1

Resolver el siguiente problema utilizando el algoritmo Simplex en su forma estándar o usando ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \text{máx } z &= 3x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.a } 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\
 x_1 &\leq 4 \\
 x_2 &\leq 6 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Solución

Agregamos variables de holgura x_3, x_4 y x_5 para que las restricciones sean de igualdad y escribimos el problema en forma de sistemas de ecuaciones. En lo que sigue consideraremos que la ecuación (0) corresponde a la de la función objetivo.

$$z - 3x_1 - 5x_2 = 0 \tag{0}$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \tag{1}$$

$$x_1 + x_4 = 4 \tag{2}$$

$$x_2 + x_5 = 6 \tag{3}$$

Notamos que los lados derecho son todos positivos y las variables de holgura forman vectores canónicos de \mathbb{R}^3 . Además las variables de holgura no aparecen en la función objetivo. Es por esto que ellas forman una base factible trivial (verifican que $x_i \geq 0 \forall i$). Entonces:

■ ITERACIÓN 1:

- variables básicas: x_3, x_4, x_5
- variables no básicas: x_1, x_2

Luego, el sistema de ecuaciones esta en forma canónica y podemos aplicar los criterios de optimalidad, entrada y salida:

- 1) **Optimalidad:** No es óptimo porque existen costos reducidos negativos ($\bar{c}_1 = -3, \bar{c}_2 = -5$).
- 2) **Entrada:** El mínimo entre los costos reducidos negativos es $\bar{c}_2 = -5$ por lo que x_2 entra a la base.
- 3) **Salida:** Tenemos que resolver $\min\{\frac{18}{2}, \frac{6}{1}\} = 6$ por lo tanto x_5 sale de la base.

■ ITERACIÓN 2:

- variables básicas: x_2, x_3, x_4
- variables no básicas: x_1, x_5

Luego, el sistema de ecuaciones no esta en forma canónica. Debemos hacer desaparecer x_2 de la ecuación (1) y de la función objetivo. Luego, sumando $-2 \cdot (3)$ a (1) y sumando $-5 \cdot (3)$ a (0) obtenemos el sistema:

$$z - 3x_1 - 5x_5 = 30 \quad (0)$$

$$3x_1 + x_3 - 2x_5 = 6 \quad (1)$$

$$x_1 + x_4 = 4 \quad (2)$$

$$x_2 + x_5 = 6 \quad (3)$$

Ahora el sistema esta en forma canónica y podemos aplicar los criterios:

- 1) **Optimalidad:** No es óptimo porque existen costos reducidos negativos ($\bar{c}_1 = -3$).
- 2) **Entrada:** El único costo reducido negativos es $\bar{c}_1 = -3$ por lo que x_1 entra a la base.
- 3) **Salida:** Tenemos que resolver $\min\{\frac{6}{3}, \frac{4}{1}\} = 2$ por lo tanto x_3 sale de la base.

■ ITERACIÓN 3:

- variables básicas: x_1, x_2, x_4
- variables no básicas: x_3, x_5

Luego, el sistema de ecuaciones no esta en forma canónica. Debemos hacer desaparecer x_1 de la ecuación (2) y de la función objetivo. Además debemos hacer que x_1 sea acompañado por un 1 en la ecuación (1), Luego, ponderando (1) por $\frac{1}{3}$, sumando $-1 \cdot (1)$ a (2) y sumando $-3 \cdot (1)$ a (0) obtenemos el sistema:

$$z + 3x_3 + 3x_5 = 36 \quad (0)$$

$$x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5 = 2 \quad (1)$$

$$\frac{-1}{3}x_3 + x_4 + \frac{2}{3}x_5 = 2 \quad (2)$$

$$x_2 + x_5 = 6 \quad (3)$$

Ahora el sistema esta en forma canónica y podemos aplicar los criterios:

1) Optimalidad: Es óptimo porque no existen costos reducidos negativos.

Finalmente podemos decir que la solución óptima es $x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 0, x_4 = 2$ y $x_5 = 0$ con función objetivo $z = 36$. Además como todos los costos reducidos son estrictamente positivos no existen óptimos alternativos y como no existen variables básicas nulas el vértice no es degenerado.

5.2. Problema 2

Resolver por Simplex matricial el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a } x_1 + x_2 &\leq 5 \\ -x_1 - 3x_2 &\geq -9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución

En este problema intentaremos mostrar que todo lo dicho con un sistema de ecuaciones puede implementarse con matrices o tablas. En efecto, en cada iteración lo que estamos haciendo es formar una matriz identidad, para lo cual debemos premultiplicar por la inversa de la matriz de coeficientes básicos o pivotar sobre un elemento de la tabla. De esta manera, resolveremos este problema 2 veces:

- Solución 1: Usando matrices.
- Solución 2: Usando tablas.

Solución 1: Usando matrices

En primer lugar debemos llevar el problema a su forma estandar, i.e, un problema de minimización, con restricciones de igualdad y en que todas las variables son mayores o iguales a cero.

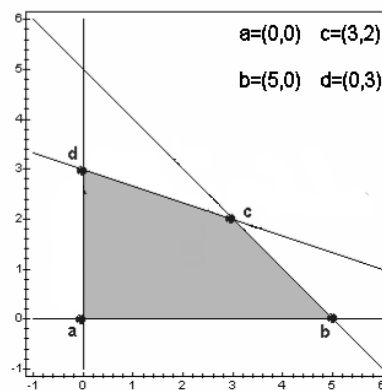
$$\text{mín } \tilde{z} = -2x_1 - 3x_2$$

$$\text{s.a } x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 9$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Gráficamente...



Matricialmente...

$$- \text{mín } \tilde{z} = (-2, -3, 0, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Y ahora a resolver...

Para iniciar el algoritmo necesitamos encontrar una base inicial o equivalentemente un vértice factible. Trivialmente, una base inicial es en este caso la asociada a las variables de holgura que corresponde al vértice a del poliedro factible ⁴:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_R$$

⁴Mas adelante se verá un ejemplo de la fase I del algoritmo que busca vértices iniciales.

Para verificar que en efecto esta base es factible, basta comprobar que las variables básicas cumplan la condición de no negatividad:

$$\begin{aligned} Bx_B + Rx_R &= b \\ x_B &= B^{-1}b - Rx_R \end{aligned}$$

Como por definición $x_R = 0$, entonces

$$x_B = B^{-1}b = \bar{b}$$

En este caso $B = I_2 \Rightarrow B^{-1} = I_2$. Luego

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Como $x_3 = 5$ y $x_4 = 9$ son mayores o iguales a 0, entonces la base es factible ⁵.

Ahora podemos empezar a iterar. En cada iteración nos preguntaremos las clásicas preguntas (1) ¿Es óptima la solución? y en caso de que no lo sea agregaremos (2) ¿Qué variable x_s debe entrar a la base? (3) ¿Qué variable x_r debe salir (dado que entrará x_s)?

■ ITERACIÓN 1:

- 1) Es óptima la solución?

El criterio de optimalidad nos dice que el vertice será óptimo si todos los costos reducidos ($\bar{C}_R = C_R - B^{-1}R$) son mayores o iguales a 0. Entonces calculamos los costos reducidos:

$$(\bar{c}_1, \bar{c}_1) = (-2, -3) - (0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (-2, -3)$$

\therefore El vértice no es óptimo ya que existen costos reducidos con valores negativos.

- 2) Que variable entra a la base?

Para ello escogemos la variable cuyo costo reducido sea mas negativo (o equivalentemente, de entre las variables que tienen costo reducido menor que cero, escogemos aquella que tenga costo reducido con mayor módulo).

$$\min_{s.a. \quad \bar{c}_i \leq 0} \{\bar{c}_i\}_i = \min \{\bar{c}_3, \bar{c}_4\} = \min \{-2, -3\} = -3$$

$\therefore x_2$ entra a la base.

⁵En general si en la matriz A tenemos una submatriz identidad y en el lado derecho b tenemos sólo valores positivos, podemos tomar la identidad como base. Si no es así, debemos resolver Fase I

3) Que variable sale de la base? (dado que x_2 entra)

$\min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}$ en que $\bar{b} = B^{-1}b$ y \bar{a}_{is} son coeficientes de la matriz $B^{-1}R$. En este caso:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\bar{a}_{.s}}$$

Entonces:

$$\min \left\{ \frac{x_3}{1}, \frac{x_4}{3} \right\} = \left\{ \frac{x_3}{5}, \frac{x_4}{3} \right\} = 3$$

$\therefore x_4$ sale de la base (para que pueda entrar x_2)

■ ITERACIÓN 3:

Antes de contestar nuestras preguntas fundamentales, veamos que hemos avanzado con la iteración 1:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\hspace{1cm}}_R$$

Esta solución factible (en que se han intercambiado las columnas asociadas a x_2 y x_4), corresponde al vértice $d=(0,3)$. Esto es un poco obvio pues hicimos crecer x_2 lo máximo mientras sea factible.

Además notamos que en el vértice anterior $\tilde{z} = 0$ y ahora $\tilde{z} = -9$. Luego, nos movimos a un vértice adyacente con un mejor valor de la función objetivo.

Ahora continuamos nuestro proceso iterativo (con un poco menos de explicaciones):

1) ¿Es óptima la solución?

$$\begin{aligned} (\bar{c}_1, \bar{c}_4) &= (-2, 0) - (0, -3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-2, 0) - (0, -3) \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-2, 0) - (0, -3) \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= (-2, 0) - (-1, -1) \\ &= (-1, +1). \end{aligned}$$

Entonces:

$$\bar{c}_1 = -1 \leq 0$$

$$\bar{c}_4 = +1 \geq 0$$

\therefore El vértice no es óptimo pues existen costos reducidos negativos.

2) ¿Que variable entra a la base?

La única asociada a un costo reducido negativo: x_1 . Mas formalmente:

$$\min_{s.a} \{\bar{c}_i\}_i = \min \{-1\} = -1$$

$\therefore x_1$ entra a la base.

3) ¿Que variable sale de la base? (dado que x_1 entra)

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b}_3 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{2/3} & -1/3 \\ \mathbf{1/3} & 1/3 \end{pmatrix}}_{\bar{a}_{\cdot s}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\min \left\{ \frac{x_3}{2/3}, \frac{x_4}{1/3} \right\} = 3$$

$\therefore x_3$ sale de la base

■ ITERACIÓN 3:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_R$$

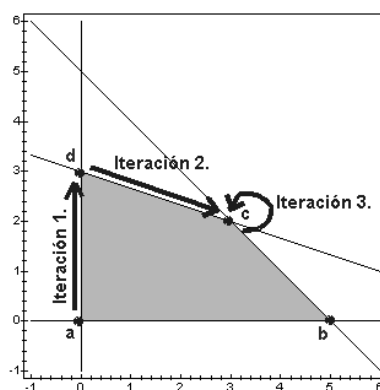
Esta solución factible (en que se han intercambiado las columnas asociadas a x_1 y x_3), corresponde al vertice $c=(3,2)$ que nuevamente corresponde a un vértice que mejora la función objetivo.

1) Es óptima la solución?

$$\begin{aligned}
(\bar{c}_3, \bar{c}_4) &= (0, 0) - (-2, -3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (0, 0) - (-2, -3) \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (0, 0) - (-2, -3) \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\
&= (3/2, 1/2)
\end{aligned}$$

\therefore La solución es óptima.

Notar que gráficamente se puede ver como nos fuimos moviendo por vertices adyacentes hasta llegar al óptimo: $a \rightarrow d \rightarrow c$. Si en la primera iteración hubieramos escogido hacer entrar a la otra variable con costo reducido negativo, tambien hubiesemos llegado al óptimo, pero siguiendo el otro camino: $a \rightarrow b \rightarrow c$.



Solución 2: Usando tablas

Pasamos el problema a forma estandar:

$$\begin{aligned}
\text{mín } z &= -5x_1 - 3x_4 \\
s.a \quad x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\
x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

■ ITERACIÓN 1:

Trivialmente tenemos una base factible formada por las variables de holgura x_3 y x_4 :

x_3	x_4	x_1	x_2	
0	0	-2	-3	0
1	0	1	1	5
0	1	1	3	9

Notamos que esta en forma canónica porque las variables básicas forman cada una un vector canónico de \mathbb{R}^2 y tienen coeficientes en la función objetivo nulos. Así, podemos aplicar los criterios de optimalidad, entrada y salida de la base:

- 1) **Optimalidad:** No es óptimo porque existen variables no básicas con costos reducidos negativos.
- 2) **Entrada:** Entra la variable con menor costo reducido: x_2 .
- 3) **Salida:** $\min\{\frac{5}{1}, \frac{9}{3}\} = 3$, luego, sale x_4 .

■ **ITERACIÓN 2:**

Al intercambiar las variables x_2 por x_4 nuestra base queda conformada por las variables x_3 y x_2 :

x_3	x_2	x_1	x_4	
0	-3	-2	0	0
1	1	0	0	5
0	3	1	1	9

Notamos que no esta en forma canónica porque lo que tenemos que pivotar:

x_3	x_2	x_1	x_4	
0	0	-1	1	9
1	0	$2/3$	$-1/3$	3
0	1	$1/3$	$1/3$	3

Notar aquí que nuestra solución en curso es $(0, 3, 2, 2)$ con valor de la función objetivo de 9. Como ahora está en forma canónica por lo que podemos aplicar los criterios de optimalidad, entrada y salida de la base:

- 1) **Optimalidad:** No es óptimo porque existen variables no básicas con costos reducidos negativos.
- 2) **Entrada:** Entra la variable con menor costo reducido: x_1 .
- 3) **Salida:** $\min\{\frac{2}{2/3}, \frac{3}{1/3}\} = 3$, luego, sale x_3 .

■ **ITERACIÓN 3:**

Al intercambiar las variables x_1 por x_3 nuestra base queda conformada por las variables x_1 y x_2 :

$$\begin{array}{cc|cc||c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\
2/3 & 0 & 1 & -1/3 & 2 \\
1/3 & 1 & 0 & 1/3 & 3
\end{array}$$

Notamos que no está en forma canónica porque lo que tenemos que pivotear:

$$\begin{array}{cc|cc||c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
0 & 0 & 3/2 & 1/2 & 12 \\
1 & 0 & 3/2 & -1/2 & 3 \\
0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 2
\end{array}$$

Notar aquí que nuestra solución en curso es $(3, 2, 0, 0)$ con valor de la función objetivo de 12. Como ahora está en forma canónica por lo que podemos aplicar los criterios de optimalidad, entrada y salida de la base:

- 1) **Optimalidad:** Es óptimo porque no existen variables no básicas con costos reducidos negativos.

⊙

5.3. Problema 3

Resolver el siguiente problema usando la forma canónica de Simplex:

$$\begin{aligned}
&\text{máx } z = 6x_1 + 4x_2 \\
s.a \quad &x_1 + x_2 \leq 10 \\
&2x_1 + x_2 \geq 4 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Solución

Antes de todo, debemos pasar a forma estándar:

$$\begin{aligned}
&\text{mín } \tilde{z} = -6x_1 - 4x_2 \\
s.a \quad &x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\
&2x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Antes de resolver, notamos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, si bien tenemos lado derecho positivo, no tenemos una submatriz identidad en la matriz A y por tanto no tenemos una base factible inicial. Entonces debemos resolver Fase I: agregamos variables artificiales para formar identidad y minimizamos la suma de variables artificiales ⁶.

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & w = x_5 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

O equivalentemente:

$$-w + x_5 = 0 \tag{0}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \tag{1}$$

$$2x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 4 \tag{2}$$

Notar que la ecuación (0) NO es equivalente si se multiplica por -1 ya que en efecto eso correspondería a un problema de maximización. Ahora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Y por tanto tenemos una base factible inicial para fase I formada por las variables x_3 y x_5 . Resolvemos fase I. Podríamos hacerlo matricialmente igual que el problema anterior, pero lo resolveremos mediante forma canónica que si bien es mas ineficiente en cuanto a cálculos y de mas difícil implementación computacional, puede resultar mas intuitiva.

Al observar el sistema, notamos que no tenemos una forma canónica porque si bien tenemos vectores canónicos para las variables básicas x_3 y x_5 , en la función objetivo la variable básica x_5 tiene un coeficiente distinto de 0.

A la ecuación (0) le necesitamos le restamos ecuación (2)

$$-w - 2x_1 - x_2 + x_4 = -4 \tag{0}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \tag{1}$$

$$2x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 4 \tag{2}$$

⁶El problema original si y solo si la funcion objetivo óptima de fase I vale 0

- **Optimalidad:** No es óptimo pues existen costos reducidos negativos.
- **Entrada:** Entra x_1 pues tiene el costo reducido mas negativo (-2).
- **Salida:** Sale x_5 pues $\frac{4}{2} < \frac{10}{1}$.

Nuestras nuevas variables básicas son x_3 y x_1 . Para generar la forma canónica asociada debemos "hacer desaparecer" x_1 de la segunda ecuación. Para ello dividimos por 2 la 3ra ecuación, y luego sumamos 2 veces dicha ecuación a la primera y la restamos a la segunda. Así:

$$-w + x_5 = 0 \quad (0)$$

$$\frac{1}{2}x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 8 \quad (1)$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 2 \quad (2)$$

- **Optimalidad:** Es ptimo pues no existen costos reducidos negativos.

Como $\sum(\text{variables artificiales}) = 0$, entonces tenemos una solución factible inicial dada por:

- variables básicas: $x_1 = 2$, $x_3 = 8$.
- variables no básicas: $x_2 = 0$, $x_4 = 0$.

Así, podríamos comenzar todo de nuevo con esta base inicial, sin embargo, esto no es necesario porque podemos construir su forma canónica asociada cambiando la función objetivo y eliminando la variable artificial x_5 de todas las ecuaciones (recordar que ya sabemos que las variables artificiales son nulas):

$$z - 6x_1 - 4x_2 = 0 \quad (0)$$

$$\frac{1}{2}x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 8 \quad (1)$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 = 2 \quad (2)$$

No está en forma canónica porque x_1 tiene un coeficiente distinto de cero en la función objetivo. Para pasar a la forma canónica, debemos sumarle 6 veces la ecuación (2) a la ecuación (0). Así:

$$z - x_2 - 3x_4 = 12 \quad (0)$$

$$\frac{1}{2}x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 8 \quad (1)$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 = 2 \quad (2)$$

Como ahora esta en forma canónica nos preguntamos:

- **Optimalidad:** No es óptimo pues existen costos reducidos negativos.
- **Entrada:** Entra x_4 pues tiene el costo reducido mas negativo (-3).
- **Salida:** Sale x_2 pues es el único con $\bar{a}_{i4} > 0$.

Nuestras nuevas variables básicas son x_4 y x_1 . Debemos pivotar nuevamente para eliminar x_4 de la 1ra y 3ra ecuaciones. Así:

$$z + 2x_2 - 6x_3 = 60 \quad (0)$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \quad (2)$$

Como está en forma canónica nos preguntamos:

- **Optimalidad:** Es óptimo pues no existen costos reducidos negativos.

Finalmente el punto óptimo es $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 16$. La función objetivo óptima es $z = 60$

5.4. Problema 3

Sea el problema:

$$\text{máx } z = 3x_1 + x_2 + 4x_3$$

$$s.a \quad 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 25$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 20$$

$$x_i \geq 0$$

Se entrega la siguiente información canónica:

$$\begin{aligned} \text{mín } \tilde{z} &= -17 + \bar{c}_2 x_2 + \frac{1}{5} x_4 + \frac{3}{5} x_5 \\ \text{s.a } x_1 - \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_4 - \frac{1}{3} x_5 &= \bar{b}_1 \\ x_2 + x_3 - \frac{1}{5} x_4 + \frac{2}{5} x_5 &= \bar{b}_2 \end{aligned}$$

En donde $\tilde{z} = -z$ y x_4, x_5 son las variables de holgura definidas en la primera y segunda restricción respectivamente.

1. A partir de la información entregada encuentre la solución óptima del problema y encuentre los coeficientes incógnitos.
2. Suponga que las restricciones del problema original en lugar de \leq se cambian por \geq . A partir de la información entregada encuentre la solución óptima del problema modificado.

Solución

Antes de cualquier cosa, pasamos el problema original a forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{mín } \tilde{z} &= -3x_1 - x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a } 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_5 &= 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Luego, reconocemos que

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \end{bmatrix} \quad c^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ -3 & -1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Para encontrar los coeficientes incógnitos necesitamos saber cuál es la base asociada a la forma canónica que nos dan. Para ello, nos fijamos en cuáles son las variables que solo aparecen en 1 restricción y acompañados por un coeficiente 1⁷. Claramente las variables básicas son x_1 y x_3 . Entonces:

⁷Recordar que en la forma canónica las variables básicas son aquellas que tienen costo reducido nulo y su respectiva columna es un vector canónico de R^m

$$A = \begin{array}{ccccc} & x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & x_5 \\ \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & B & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & R \end{array}$$

Además:

$$c_B = (-3, -4) \qquad c_R = (-1, 0, 0)$$

Luego, podemos calcular los coeficientes incógnitos:

$$\bar{b} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_R = c_R - C_B B^{-1} R \Rightarrow (\bar{c}_2, \bar{c}_4, \bar{c}_5) &= (-1, 0, 0) - (-3, -4) \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1, 0, 0) - (-3, -4) \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \\ &= (2, 1/5, 3/5) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\bar{b}_1 = 5/3 \qquad \bar{b}_2 = 3 \qquad \bar{c}_2 = 2$$

Como $c_R > 0$ para todas las variables no básicas \Rightarrow la base es óptima. Así, la solución óptima viene dada por:

$$x_1 = 5/3 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 3 \qquad x_4 = 0 \qquad x_5 = 0$$

Con esto, el valor de la función objetivo es de

$$\tilde{z} = -3 \cdot 5/3 - 4 \cdot 3 = 17$$

2. El problema es básicamente el mismo, pero cambian algunos signos:

$$\begin{aligned} \text{máx } z &= 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a } 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\geq 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\geq 20 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Pasando a forma standar:

$$\begin{aligned} \text{mín } \tilde{z} &= -3x_1 - x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a } 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 &= 25 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_5 &= 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Luego, reconocemos que

$$A = \begin{bmatrix} \overset{x_1}{6} & \overset{x_2}{3} & \overset{x_3}{5} & \overset{x_4}{-1} & \overset{x_5}{0} \\ 3 & 4 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \end{bmatrix} \quad c^t = (\overset{x_1}{-3} \quad \overset{x_2}{-1} \quad \overset{x_3}{-4} \quad \overset{x_4}{0} \quad \overset{x_5}{0})$$

Nuevamente vemos que las variables básicas son x_1 y x_3 . Entonces:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{x_1}{6} & \overset{x_3}{5} \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{x_2}{3} & \overset{x_4}{-1} & \overset{x_5}{0} \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_R$$

Además:

$$c_B = (-3, -4) \quad c_R = (-1, 0, 0)$$

Luego, podemos calcular los coeficientes incógnitos:

$$\bar{b} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Como $5/3 > 0$ y $3 > 0$, la base es factible. Además:

$$\begin{aligned} \bar{c}_R &= c_R - C_B B^{-1} R \Rightarrow (\bar{c}_2, \bar{c}_4, \bar{c}_5) = (-1, 0, 0) - (-3, -4) \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (-1, 0, 0) - (-3, -4) \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 1/5 & -1/5 \end{pmatrix} \\ &= (2, -1/5, -3/5) \end{aligned}$$

Como existe $\bar{c}_R < 0$, entonces la forma solución no es óptima. para encontrar el óptimo tenemos que hacer entrar la variable x_s tal que $\bar{c}_s = \min\{\bar{c}_R \mid \bar{c}_R < 0\}$ y hacer salir la primera variable que se anule y seguir de manera análoga a los problemas anteriores.

Notar que:

- La forma canónica entregada sería inconsistente con el problema modificado. En efecto, basta mirar los valores de \bar{R} y darse cuenta que hay signos cambiados.
- Fue necesario verificar que la base escogida $[A_1, A_3]$ fuera factible certificando que $x_B = B^{-1}b \geq 0$ ya que a priori no existía nada que nos lo garantizara.
- Me dió mucha lata continuar iterando pues no aporta ningún concepto nuevo.

◉

5.5. Problema 4

1. Defina y explique en que consisten:
 - Criterio de entrada de Simplex.
 - Criterio de salida de Simplex.
 - Criterio de optimalidad de Simplex.
2. Que complejidad tiene el algoritmo Simplex?
3. El criterio de entrada de Simplex asegura la máxima variación de la función objetivo despues de una iteración?. De no ser así, defina un criterio que si asegure la máxima variación
4. Cuando un problema de optimización tiene:
 - Óptimos alternativos.
 - Solución degenerada.
 - Solución no acotada.

Explique en que consiste cada una de estas clasificaciones.

5.5.1. Solución

1. Después de las extensas explicaciones anteriores, esta pregunta debiera parecerles bastante trivial:
 - Criterio de entrada
Tomar cualquier variable básica x_s tal que $\bar{c}_s < 0$. Por convención se toma el mínimo de los \bar{c}_s negativos.

- Criterio de salida

Sale la primera variable x_r que se anula al hacer crecer x_s . Esto se hace encontrando la variable que se anula en el máximo crecimiento factible de x_s :

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\} \text{ Sale } x_r \text{ que certifique este mínimo.}$$

- Criterio de Optimalidad

La base es óptima si no es posible aumentar el valor de ningún x_R de modo que el problema siga siendo factible y se mejore el valor de la función objetivo. Esto se verifica si $\bar{c}_R \geq 0 \forall x_R$.

2. Exponencial (Recordar para analizar la complejidad de un algoritmo, debe analizarse solo el peor caso)

3. Antes de contestar, consignemos que:

- Al escoger una variable para entrar a la base, esta variable se hará crecer hasta que se anule otra, es decir hasta que se llegue a otro vertice.
- Se escoge el mejor de los \bar{c}_R negativos porque mejora el valor de la función objetivo a una mejor tasa (o mas rapidamente).
- Supongamos que decidimos que entre la variable x_s haciendo aumentar su valor. El valor que tomará la variable x_s cuando la primera variable básica se anula viene dado por $\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$ (x_r es la primera variable que se anula).

Con esto, debiera ser claro que el criterio de entrada no garantiza moverse al mejor vértice adyacente. Para ello se requeriría un criterio como:

$$\min \left\{ \bar{c}_i \cdot \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\} \mid \bar{c}_i < 0 \text{ y } \bar{a}_{is} > 0 \right\}$$

4. En el apunte del curso esta bien explicado, pero de todas formas:

- Óptimos Alternativos

Es cuando existe mas de 1 punto (∞) puntos con el máximo (mínimo) valor de la función objetivo. Esto se tendrá cuando existe algun $\bar{c}_R = 0$ ya que podemos aumentar el valor de x_R (y por tanto variar el punto) sin variar el valor de la función objetivo.

- Solución degenerada

Es cuando un vértice esta sobredeterminado. Si $rg(A) = n$, un vertice esta sobredeterminado si es fruto de la intersección de $\bar{n} > n$ restricciones. Esta condición se verifica si existe algún $x_B = 0$

- Solución no acotada

Se tiene cuando decidimos que la variable x_s entre y no encontramos una que se anule al hacer crecer x_s . Esto se verifica si $\min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}$ es infactible para algún s porque no existen $\bar{a}_{is} > 0$

6. ANEXO: Algoritmo SIMPLEX (para problemas de minimización)

LA PRESENTE SECCIÓN CORRESPONDE A LA TRANSCRIPCIÓN DE MATERIAL DE CLASE PREPARADO POR EL DISTINGUIDÍSIMO CATEDRATICO SR.FELIPE CARO V.

■ Forma canónica o usando tablas

Se tiene el problema lineal en su forma canónica para alguna solución básica factible dada ($\bar{b}_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, m$). Las variables básicas son aquellas que tienen costo reducido nulo y su respectiva columna es un vector canónico de R^m .

$$\begin{array}{ccc|c} \bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_n & -\bar{z} \\ \hline \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mn} & \bar{b}_m \end{array}$$

1. Si $\bar{c}_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, n$ entonces la solución es **óptima** (las variables básicas son iguales a \bar{b}_i y las no básicas son nulas).
2. Si alguno de los costos reducidos es negativo ($\bar{c}_j < 0$ para algún j) entonces se debe escoger una variable no básica x_s para que entre a la base. No es obligatorio, pero usualmente se usa el criterio $\bar{c}_s = \min\{\bar{c}_j | \bar{c}_j < 0\}$.
3. Si $\bar{a}_{is} \leq 0 \forall i = 1, \dots, m$ entonces el problema es **no acotado**. Si $\bar{a}_{is} > 0$ para algún i , entonces se determina la variable que sale de la base mediante el criterio:

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}$$

4. Se pivotea sobre \bar{a}_{rs} para actualizar la tabla o la forma canónica. Las fórmulas de actualización son:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{ij} &\leftarrow \bar{a}_{ij} - \frac{\bar{a}_{is} \cdot \bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} & \bar{b}_i &\leftarrow \bar{b}_i - \frac{\bar{a}_{is} \cdot \bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \\ \bar{c}_j &\leftarrow \bar{c}_j - \frac{\bar{c}_s \cdot \bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} & -\bar{z} &\leftarrow -\bar{z} - \frac{\bar{c}_s \cdot \bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \end{aligned}$$

5. Volver a 1.

■ Forma matricial

Se el problema en su forma estándar y se asume que se conoce una base B primal factible (o sea se tiene un vértice factible inicial)

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^t \cdot x \\ \text{s.a} \quad & A \cdot x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

1. Determinar la inversa B^{-1} de la base.
2. Determinar la solución básica factible asociada a la base B. Para ello se tiene que resolver el sistema $B \cdot x_b = b$ que tiene solución única. Luego $x_b = \bar{b} = B^{-1} \cdot b$ y $z = c_B^t \cdot \bar{b}$.
3. Determinar si esta solución es óptima aplicando el criterio de optimalidad. Para esto es necesario calcular los costos reducidos asociados a las variables no básicas $\bar{c}_j = c_j - c_B^t B^{-1} A_{.j}$. Si $\bar{c}_j \geq 0 \forall j = 1, \dots, n$ entonces la solución es **óptima**. En caso contrario, efectuar el cambio de base.
4. Determinar la columna que entra a la base. Sea $\bar{c}_s = \min\{\bar{c}_j | \bar{c}_j < 0\}$, entonces la variable x_s aumentará su valor y la columna $A_{.s}$ entra a la base.
5. Determinar la columna que sale de la base. Calcular $\bar{A}_{.s} = B^{-1} A_{.s}$. Si $\bar{A}_{.s} \leq \vec{0}$ entonces el problema es **no acotado**. De lo contrario determinar r tal que

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}$$

Entonces la variable básica de la ecuación r es la primera que se anula cuando x_s crece, por lo tanto la columna $A_{.r}$ sale de la base.

6. Actualizar la base y volver a 1.