

CAPITULO 3: MECANICA DE FLUIDOS EN CIENCIAS DE LA TIERRA

El incorporar en este curso el formalismo de la mecánica de fluidos en medios continuos permite explicar una serie de fenómenos físicos de primer orden en ciencias de la tierra. Entre estos podemos mencionar:

- convección en el manto
- ascenso y emplazamiento de cuerpo ígneos en la corteza terrestre
- flujos en medios porosos (hidrogeología, magmagénesis)
- rebote isostático post-glacial
- convección forzada en la astenosfera
- deformación continental de gran escala
- flujos y reacciones en medios permeables

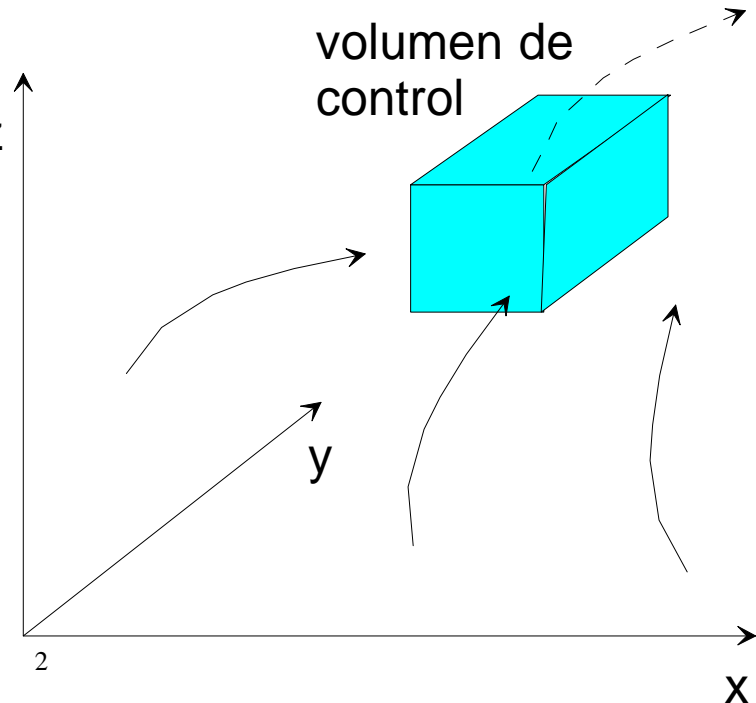
El tratamiento de estos problemas utilizando la mecánica de medios continuos es ciertamente una aproximación que no resuelve por ejemplo deformación frágil en la corteza superior, pero mirado a gran escala permite al menos caracterizar los aspectos globales del proceso geológico en estudio.

3.1 FLUJOS VISCOSOS

FLUIDO: Cualquier material que fluye en respuesta a un esfuerzo.

SISTEMA DE REFERENCIA: Para la descripción del comportamiento de un fluido debemos definir el sistema de referencia apropiado. En general se utilizan dos sistemas de referencia equivalentes, pero cuya formulación matemática es diferente.

A. **SISTEMA EULERIANO:**
Estudia el comportamiento del z fluido en un volumen de control prefijado y en un tiempo específico; sistema fijo, siempre observando el mismo punto.



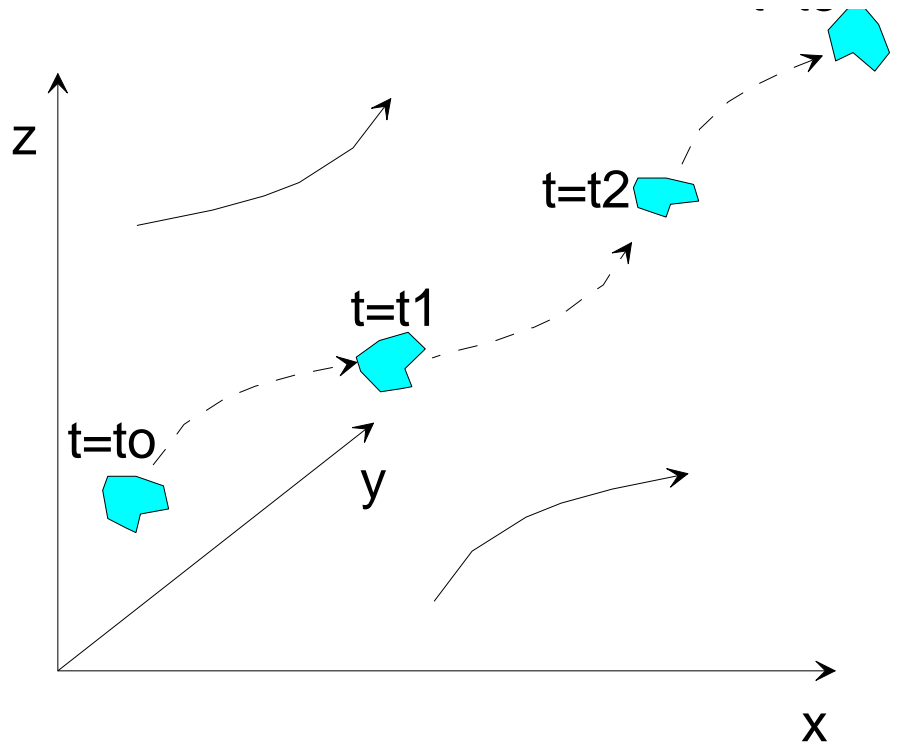
B. *SISTEMA LAGRANGIANO*:

Sistema móvil que sigue la evolución de una porción del fluido en el tiempo y el espacio.

En términos de la formulación matemática de ambos sistemas de referencia, la aceleración en el sistema Lagrangiano corresponde a:

$$\vec{a}_{lag} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

Sin embargo en el sistema Euleriano no tiene significado alguno la segunda derivada temporal de la posición, en este caso lo que interesa es la variación de la velocidad dentro del volumen de control:



$$\vec{a}_{eul} = u \frac{du}{dx}$$

En la formulación matemática que continua, se utilizará por lo general una descripción Euleriana, si bien en casos específicos de interés se adoptará un sistema de referencia Lagrangiano.

Leyes fundamentales de la mecánica de fluidos:

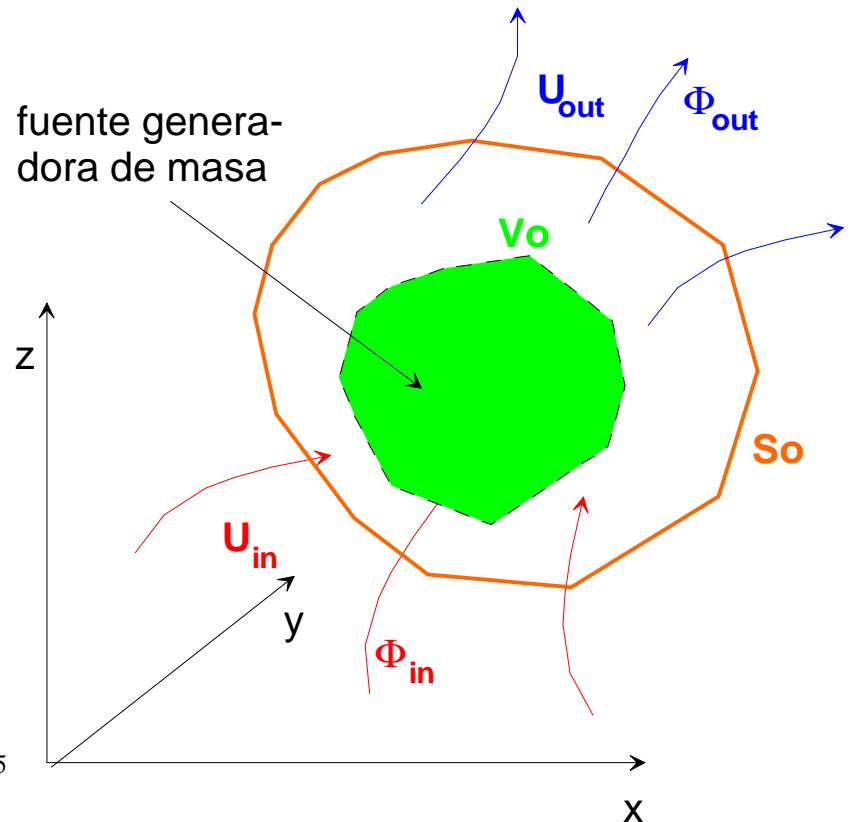
Existen 3 leyes fundamentales:

1. ***Conservación de masa:*** Considerando un volumen de control V_0 , con una superficie S_0 , la “Tasa de incremento de material en el volumen de control es igual al flujo neto de material al interior del volumen de control”:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_o} \mathbf{r} dV = - \iint_{S_o} \mathbf{r} u dS \equiv \Phi_{neto}$$

O bien en forma diferencial
(utilizando el teorema de Gauss):

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{r} u)$$



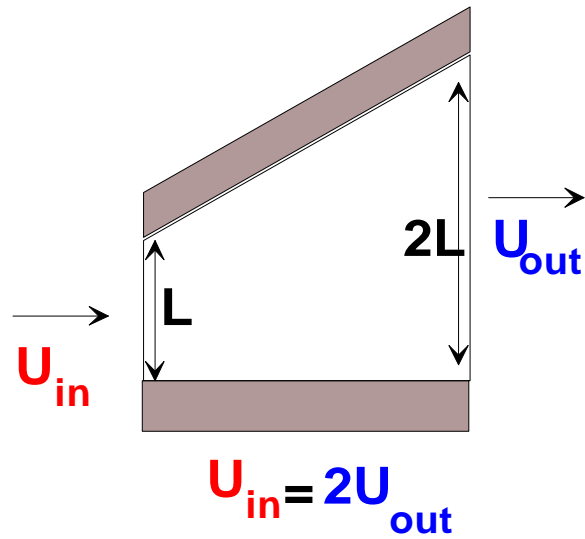
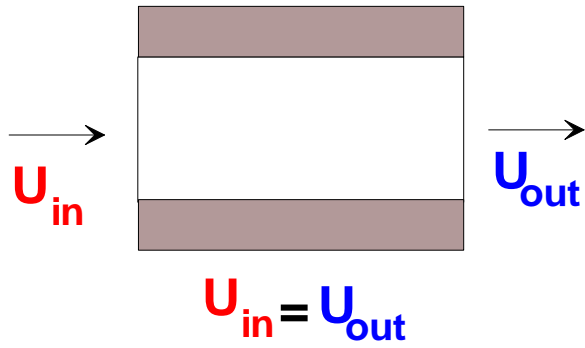
Un flujo neto positivo indica que más material esta saliendo del volumen de control. En consecuencia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_o} \rho dV < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$$

La densidad disminuye en el tiempo para mantener la condición de equilibrio. Si el flujo neto es negativo, se verifica la condición opuesta, es decir habría un aumento de densidad.

Si la tasa de variación en el tiempo es nula, la cantidad de material que entra al volumen de control debe ser igual a la que sale.



2. *Conservación del momentum, ecuación de movimiento:* De acuerdo a la segunda ley de Newton:

Fuerza Neta = (masa) x (aceleración)

En el caso de un flujo, el balance de momentum debe considerar el flujo de momento a través de las fronteras del volumen de control.

“Sumatoria de tasa de incremento del Flujo neto de la tasa de Fzas. Externas” = momento en el volumen + momentum fuera del volumen de control

$$\sum_i F_i = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_o} \rho u dV + \iint_{A_o} \rho u \cdot u dA$$

Si la densidad es constante la ecuación de conservación de momentum se expresa como:

$$\sum_i F_i = m \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{\iiint_{V_o} \rho u \cdot (\nabla u) dV}_{\text{teorema de Gauss}}$$

$$\Rightarrow \sum_i F_i = m \frac{\partial u}{\partial t} + m u \cdot (\nabla u)$$

Si adoptamos la formulación Lagrangiana, la conservación del momentum adopta la familiar forma de:

$$\sum_i F_i = m \frac{du}{dt}$$

3. *Conservación de energía:*

Considerando en forma conjunta la energía mecánica, (cinética + potencial) y la energía térmica= ENERGIA (E):

$$\begin{aligned} & \text{Tasa temporal de incremento de la energía en el volumen de control} = \text{Tasa de incremento del flujo de energía en el volumen de control} + \\ & \text{Tasa de calor agregado} + \text{Tasa de trabajo hecho por las fuerzas de presión en la superficie del volumen de control} - \text{Trabajo irreversible hecho por el fluido en el volumen de control} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_o} \underbrace{\mathbf{r} \left[e + \frac{u^2}{2} + \Psi \right]}_E dV &= \int_{A_o} \underbrace{\mathbf{r} \left[e + \frac{u^2}{2} + \Psi \right] u \cdot d\mathbf{A}}_{\substack{\text{tasa de incremento} \\ \text{del flujo de energia}}} + \underbrace{Q}_{\text{calor}} \\
+ (-) \int_{A_o} \underbrace{P u \cdot d\mathbf{A}}_{\text{presión}} - \underbrace{W_s}_{\substack{\text{trabajo} \\ \text{irreversible}}}
\end{aligned}$$

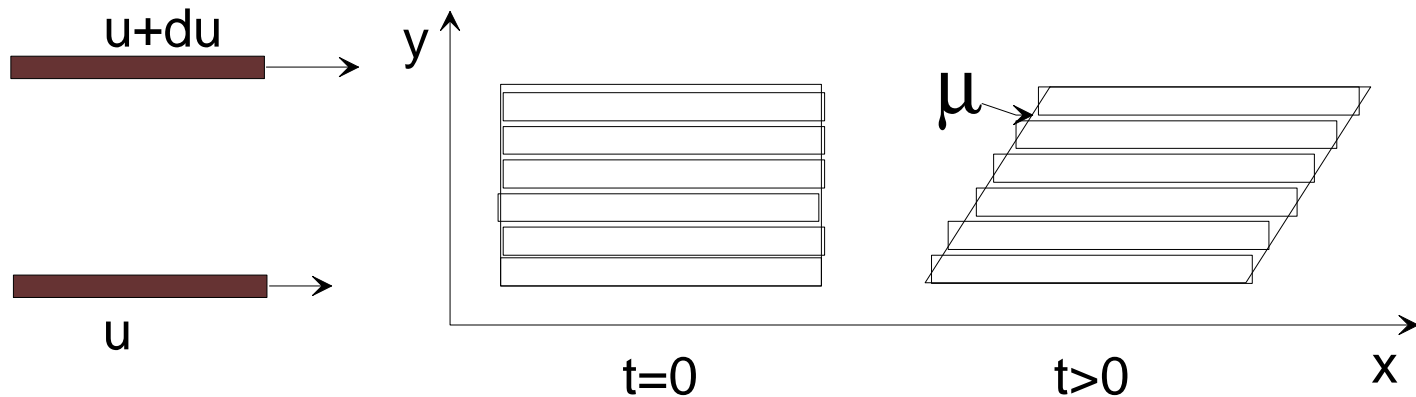
Ordenando los términos y expresando esta ecuación en formato diferencial (haciendo uso nuevamente del teorema de Gauss y definiendo:

$$Q - W_s = \int_{V_o} q_o dV$$

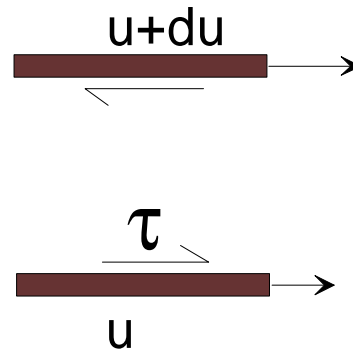
$$\frac{\partial(\mathbf{r}E)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{r} \left[E + \frac{P}{\mathbf{r}} \right] \mathbf{u} \right) = q_o \equiv \frac{\text{energía disipada}}{\text{unidad de volumen}}$$

Definición: Viscosidad (μ)

La habilidad de un fluido de resistir el flujo ante la acción de un esfuerzo de cizalle. Si imaginamos un fluido en movimiento como un conjunto de láminas paralelas a las cuales se aplica una diferencia en velocidad, la resistencia al movimiento es la viscosidad.



Si consideramos dos capas adyacentes, la capa de mayor velocidad tenderá a “arrastrar” la capa inferior:



Pero por principio de acción y reacción en la capa superior se induce una tracción en sentido opuesto que retarda el movimiento. A diferencia que en cuerpos rígidos en los cuales se establece una ley constitutiva entre esfuerzo y deformación (ley de Hook), en fluidos se establece una ley constitutiva entre el esfuerzo y la tasa de deformación (“strain rate”).

En el caso mas simple de fluidos newtonianos esta relación es lineal, siendo la viscosidad el coeficiente de proporción entre el esfuerzo y la tasa de deformación:

(en 1-D):

$$\mathbf{t}_{xy} = \mathbf{m} \frac{du}{dy}$$

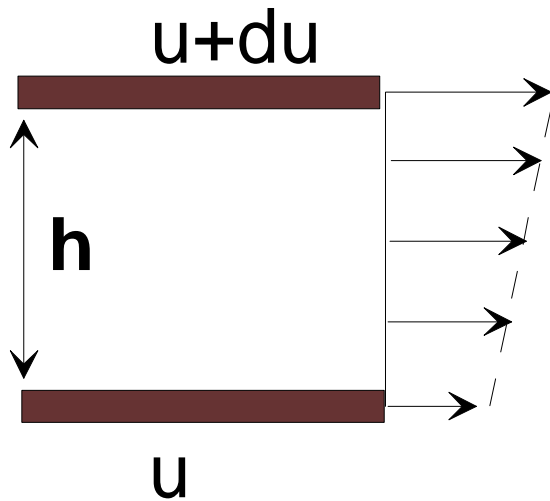
La viscosidad **m** tiene unidades de [P s]

En líquidos la viscosidad tiene una fuerte dependencia con la temperatura (decaimiento exponencial). En contraste la viscosidad en gases disminuye a medida que aumenta la temperatura. Mas adelante veremos que en la litósfera continental la viscosidad es además función de la tasa de deformación (“power laws”).

Algunos valores medios de viscosidad:

Material	Viscosidad [Pas]
Aire (15 °C)	2×10^{-5}
Agua (15 °C)	11×10^{-3}
Mercurio (15 °C)	1.6×10^{-3}
Alcohol (15 °C)	1.3×10^{-3}
Aceite (15 °C)	0.1
Glicerina (15 °C)	2
Litósfera	$10^{21}-10^{23}$
Astenósfera	$10^{19}-10^{21}$
Manto	10^{22}

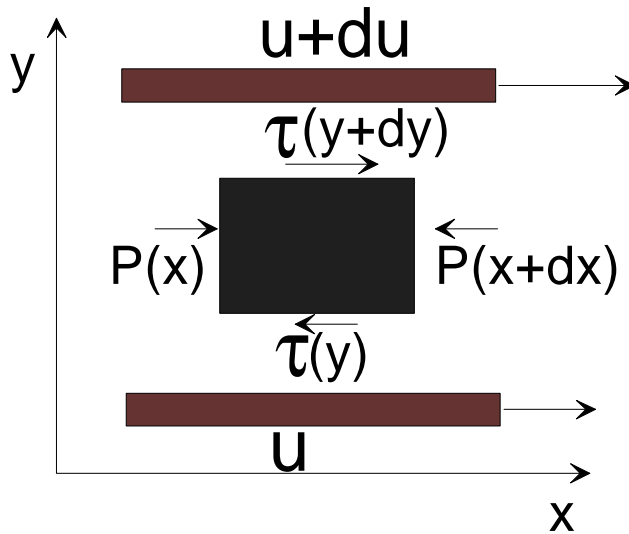
En el problema anterior de flujo entre dos capas planas y en ausencia de otras fuerzas se expresa como:



$$\mathbf{t} = \mathbf{m} \frac{du}{h}$$

En un caso mas general hay que resolver la ecuación de equilibrio de momentum en un volumen de control (caso estacionario). La fuerza neta de cizalle y presión en cada cara debe ser nula:

$$(P(x) - P(x + dx))\Delta y + (\mathbf{t}(y + dy) - \mathbf{t}(y))\Delta x = 0$$



Asumiendo una expansión de Taylor de primer orden, la diferencia de la presión entre ambas caras verticales del volumen de control se expresa como:

$$(-P(x) + P(x + dx)) = \frac{dP}{dx} \Delta x$$

$$(\mathbf{t}(y + dy) - \mathbf{t}(y)) = \frac{d\mathbf{t}}{dy} \Delta y$$

Mediante esta aproximación la ecuación de equilibrio se expresa entre las fuerzas de presión y de cizalle corresponde a:

$$\frac{d\mathbf{t}}{dy} = \frac{dP}{dx}$$

Reemplazando entonces en la ley constitutiva:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d\mathbf{t}}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\mathbf{m} \frac{du}{dy} \right)$$

Si la viscosidad es constante en el medio viscoso:

$$\frac{dP}{dx} = \mathbf{m} \frac{d^2 u}{dy^2}$$

La solución general de esta ecuación diferencial en la velocidad (para un gradiente de presión constante en la vertical):

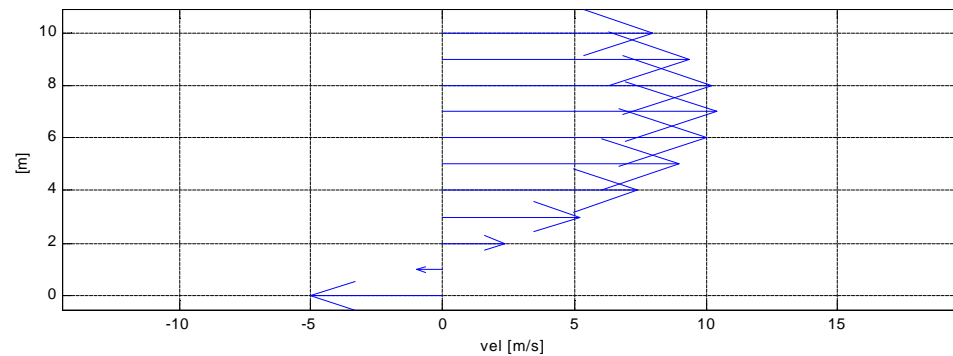
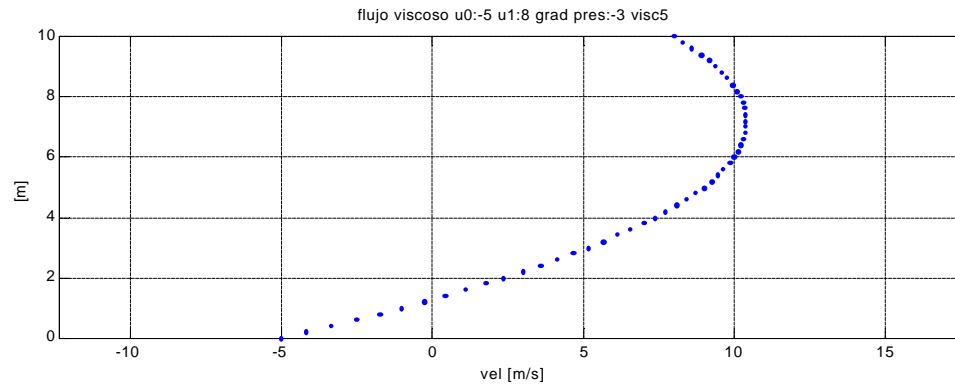
$$u = \frac{1}{2\mathbf{m}} \frac{dP}{dx} y^2 + c_1 y + c_2$$

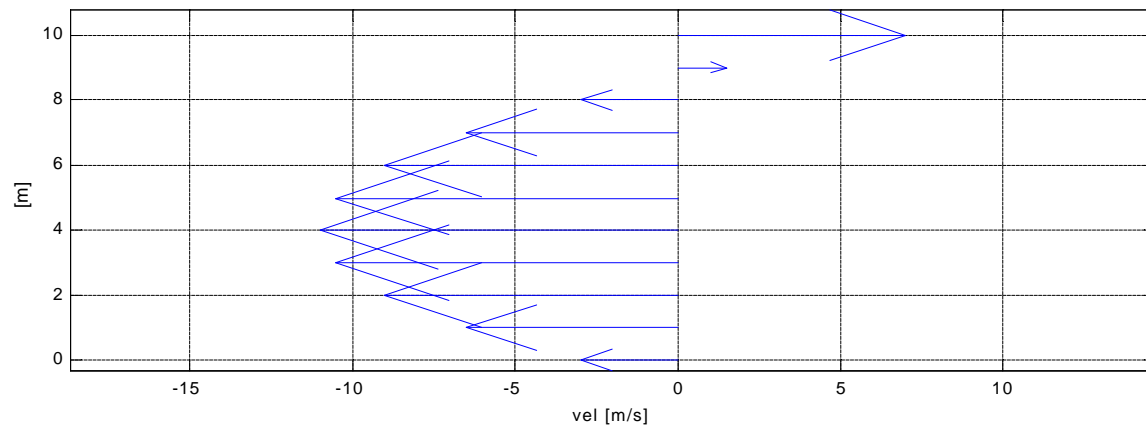
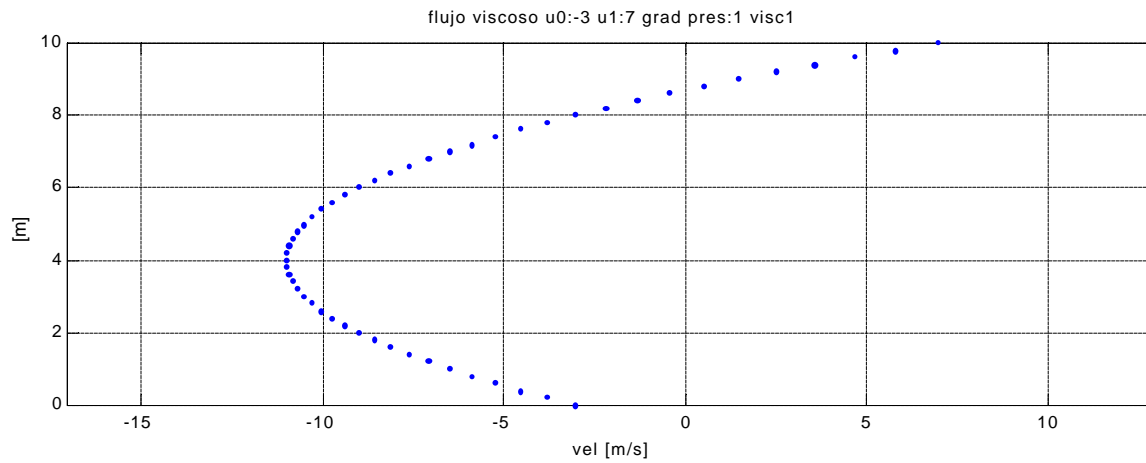
La solución general para una velocidad u_o en la base, $u(y=0)=u_o$, y una velocidad u_1 en el techo de la capa, $u(y=h)=u_1$, entonces $c_2=u_o$,

$$c_1 = \frac{(u_1 - u_o)}{h} - \frac{1}{2\mathbf{m}} \frac{dP}{dx} h$$

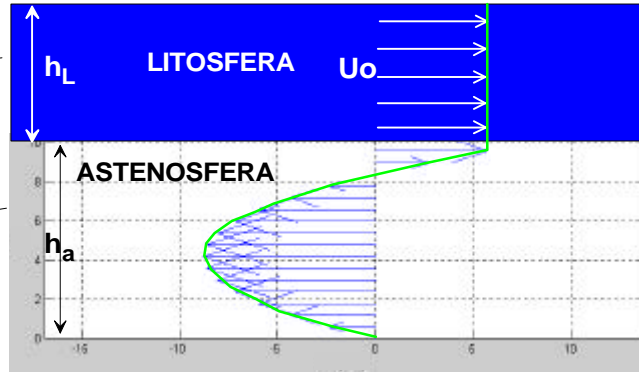
De tal forma que la velocidad en el medio puede expresarse como:

$$u = \frac{1}{2m} \frac{dP}{dx} [y^2 - yh] + \frac{(u_1 - u_o)}{h} y + u_o$$





Problema 1: Existe un flujo inverso en la astenósfera como producto del movimiento en la litósfera (condición necesaria para cumplir la condición de equilibrio de masas)?



Si el movimiento de la tectónica de placas se restringe a la litósfera y la astenósfera, entonces debe existir conservación de masas:

$$u_o h_L + \int_0^{h_a} u dy = 0$$

Reemplazando la expresión de u para una velocidad nula en la base de la astenósfera:

$$u = \frac{1}{2\mathbf{m}} \frac{dP}{dx} \left[y^2 - y h_a \right] + \frac{u_o}{h_a} y$$

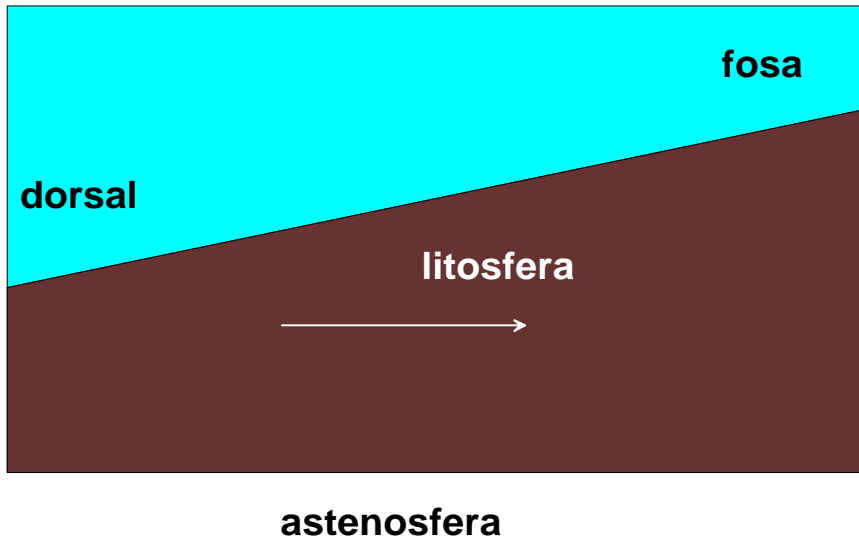
Incorporando esta expresión en la integral anterior:

$$u_o h_L + \frac{1}{2\mathbf{m}} \frac{dP}{dx} \left[\frac{h_a^3}{3} - \frac{h_a^2}{2} h_a \right] + \frac{u_o}{h_a} \frac{h_a^2}{2} = 0$$

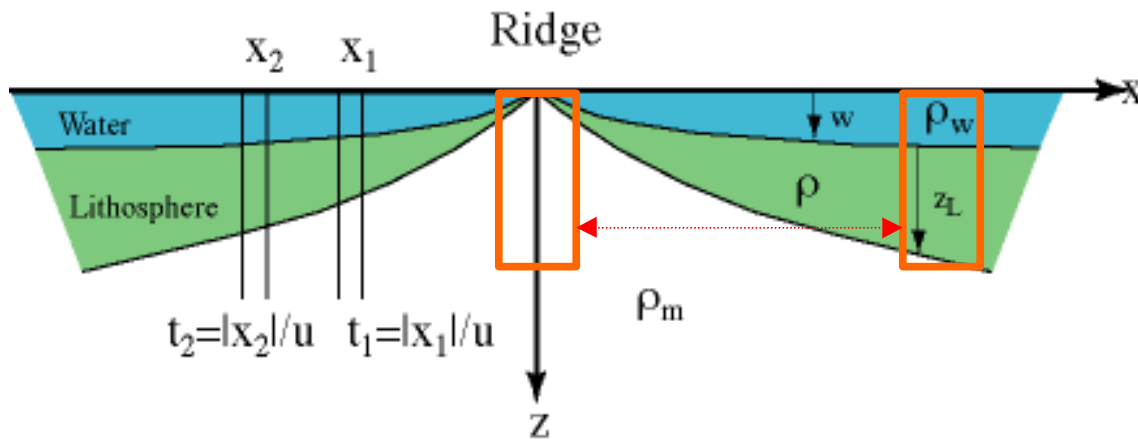
$$u_o h_L - \frac{h_a^3}{12\mathbf{m}} \frac{dP}{dx} + \frac{u_o}{1} \frac{h_a}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dx} = u_o \left(h_L + \frac{h_a}{2} \right) \frac{12\mathbf{m}}{h_a^3} > 0$$

El gradiente de presión es mayor que cero, es decir la presión aumentaría en la dirección del movimiento. Para que esta condición se cumpliera la litósfera debería aumentar su columna litostática alejado de la dorsal:



Pero bien sabemos que la morfología de la litosfera oceánica es opuesta:



En consecuencia un flujo inverso en el movimiento de la litósfera no es posible. Esta inferencia permite concluir que la litósfera oceánica es parte integral del sistema de convección en el manto y no un flujo restringido a las capas superiores.

Asumiendo entonces que no existe el flujo inverso en la astenósfera, entonces el esfuerzo de cizalle en la base de la litósfera corresponde a:

$$t = m \frac{u_o}{h_a}$$

El espesor de la astenósfera (en función de estudios sismológicos de atenuación) es de ~ 200 km; los estudios post-glaciales (a ver mas adelante) indican que la viscosidad de la astenosfera es del orden de 10^{19} Pas, y una velocidad de tectónica de placas de 5 cm/año, entrega un esfuerzo de cizalle de 0.3 Mpa. Esta resistencia basal debe incorporarse al balance de fuerzas que opera en la tectónica de placas.

Si consideramos una placa de un largo de 5000 km, la resistencia basal corresponde a:

$$0.3 \cdot 10^6 \text{ [Pa]} \times 5000 \cdot 10^3 \text{ [m]} = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ [Nm]}$$

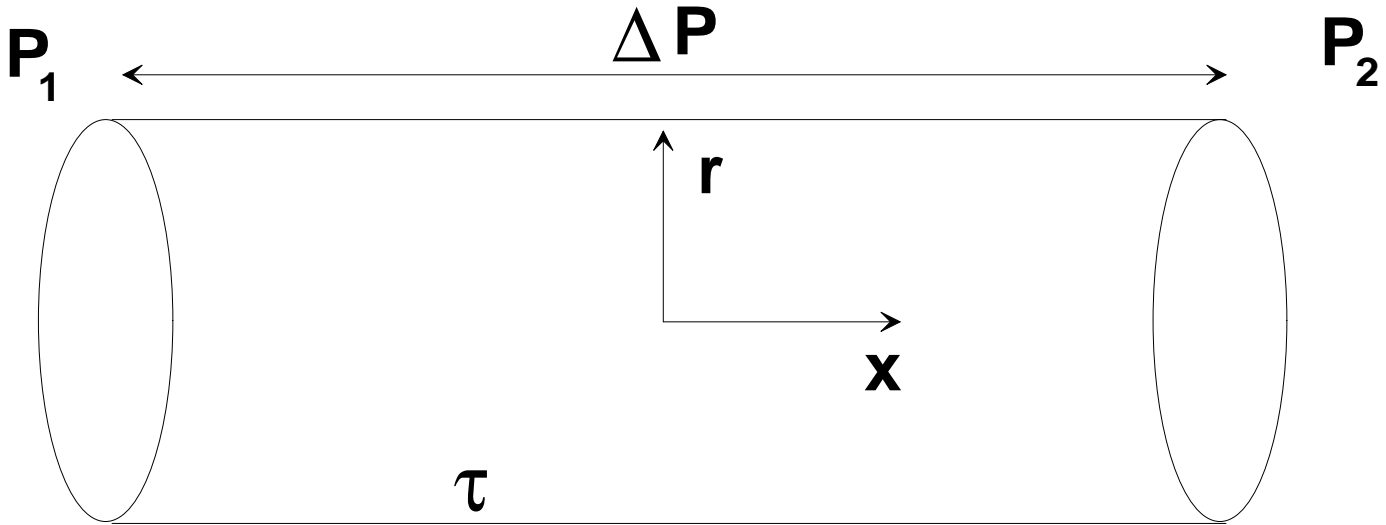
La tensión (T) en una litósfera oceánica de 100 km que logra superar la resistencia basal es en consecuencia:

$$T > 1.5 \cdot 10^{12} \text{ [Nm]} / 10^5 \text{ [m]} = 1.5 \cdot 10^7 = 15 \text{ Mpa}$$

50 veces el esfuerzo de cizalle en la base litosférica.

Flujo en una cañería (“Pipe flow”, flujo de Poiseville): este tipo de flujo es apropiado para entender el flujo en un conducto o pipa volcánica.

En este caso debemos adoptar una geometría cilíndrica:



En geometría cilíndrica la ley constitutiva se expresa como:

$$t = m \frac{du}{dr}$$

La ecuación de fuerzas con tracción en el manto y una diferencia de presión en las caras planas perpendiculares al flujo a lo largo del cilindro de control:

$$\underbrace{t (2prdx)}_{\text{sup.manto}} = dp \underbrace{(pr^2)}_{\text{sup.cara plana}}$$

Entonces:

$$t = \frac{r}{2} \frac{dP}{dx}$$

Reemplazando la ley constitutiva obtenemos una relación presión-velocidad:

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2\mathbf{m}} \frac{dP}{dx}$$

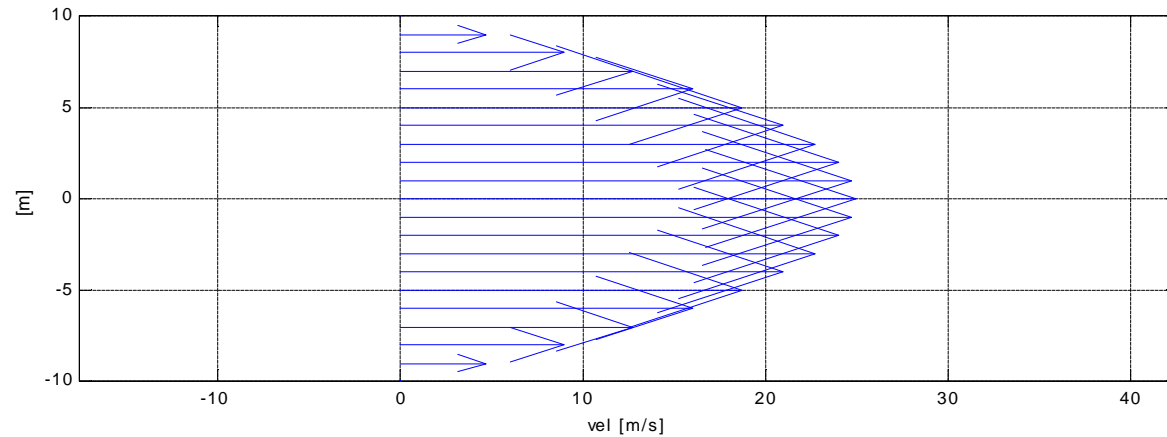
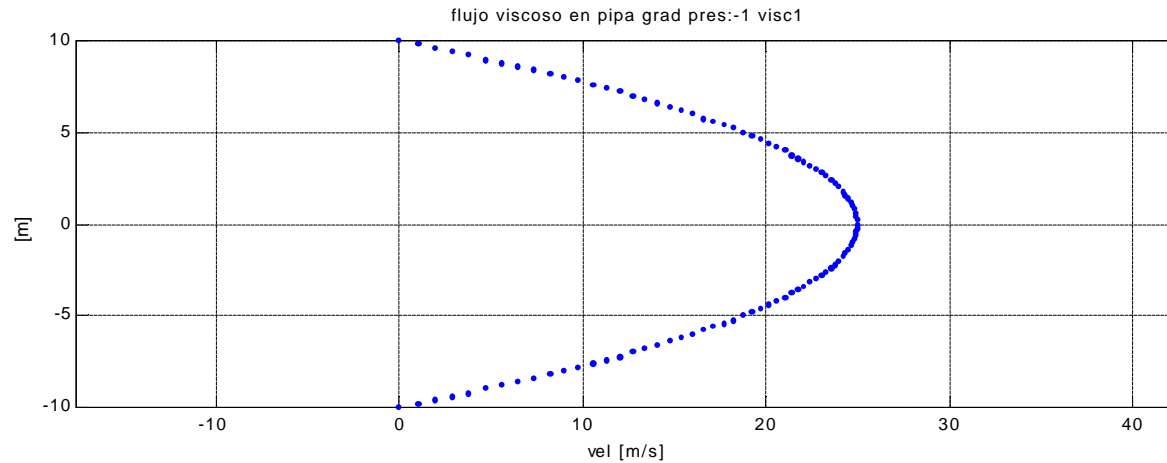
Integrando c/r a r bajo el supuesto que el gradiente de presión es constante en r:

$$u = \frac{1}{4\mathbf{m}} \frac{dP}{dx} r^2 + c$$

Imponiendo una condición de velocidad nula en el manto de la pipa ($u(r=R)=0$):

$$u = -\frac{1}{4\mathbf{m}} \frac{dP}{dx} (R^2 - r^2)$$

Si el gradiente de presión es negativo el perfil de velocidades es positivo:



Este tipo de flujo se denomina flujo de Poiseville. El flujo o caudal al interior de la pipa se determina integrando el perfil de velocidades en la sección de la pipa:

$$Q = \int_0^R u 2\mathbf{p}r dr = -\frac{2\mathbf{p}}{4\mathbf{m}} \frac{dP}{dx} \int_0^R r dr (R^2 - r^2)$$

$$= -\frac{2\mathbf{p}}{4\mathbf{m}} \frac{dP}{dx} \left[R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right] = -\frac{\mathbf{p}R^4}{8\mathbf{m}} \frac{dP}{dx}$$

Por otra parte el caudal se puede determinar a partir de la velocidad media:

$$Q = pR^2 \bar{u} = -\frac{pR^4}{8\mathbf{m}} \frac{dP}{dx}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = -\frac{R^2}{8\mathbf{m}} \frac{dP}{dx}$$

La velocidad media es proporcional al gradiente de presión.

La ecuación de velocidad media anterior permite definir 2 números adimensionales que caracterizan al fluido:

$$f = -\frac{4R^4}{r\bar{u}^2} \frac{dP}{dx} \equiv \textit{coef. fricción}$$

$$\Rightarrow R_e = \frac{r\bar{u}(2R)}{\mathbf{m}} \equiv \textit{num. Re ynolds}$$

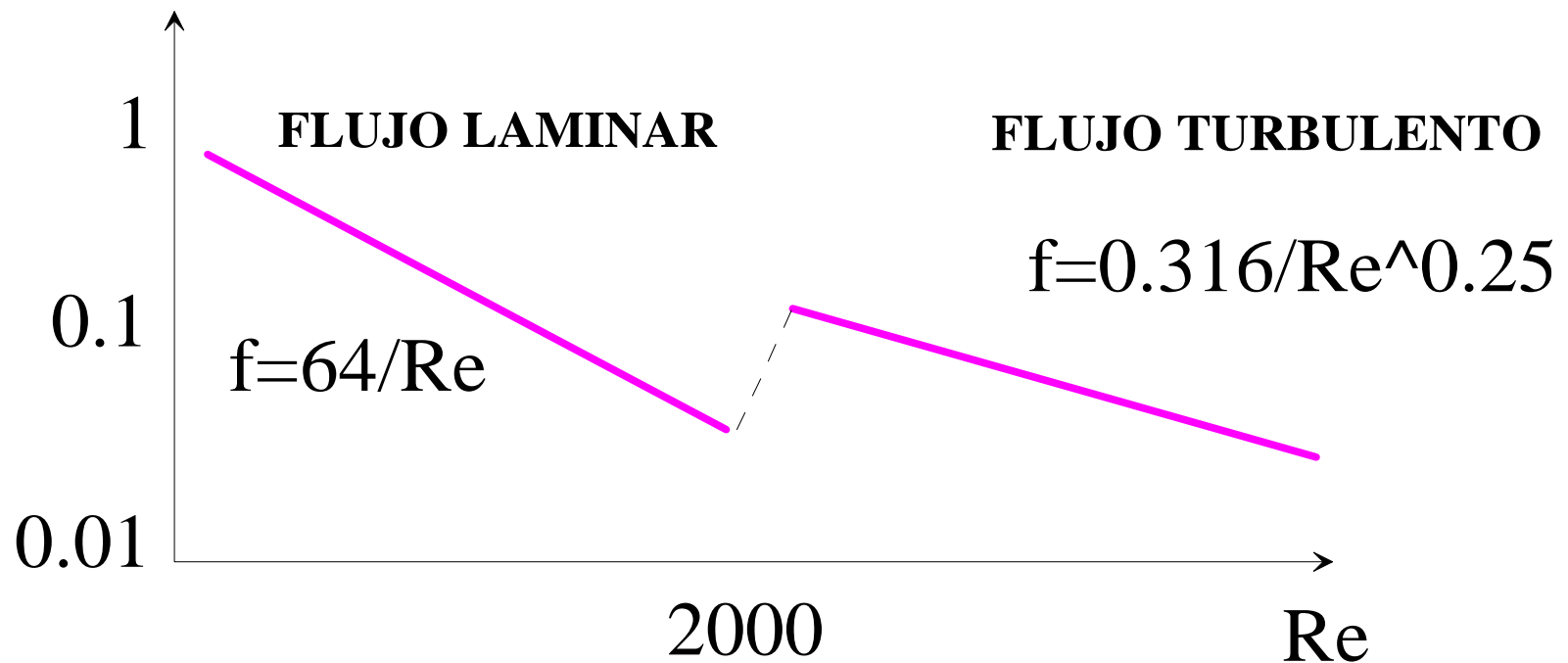
Ambos números adimensionales están ligados para este tipo de flujos laminares:

$$64=f \cdot R_e$$

En general para velocidades muy pequeñas o viscosidades muy altas los flujos tienen un comportamiento laminar. En caso contrario el tipo de flujo se

denomina turbulento, en el cual hay una gran disipación de energía en flujos en espiral y vórtices.

Experimentalmente se demuestra que para números de Reynolds superiores a 2000 el flujo es turbulento.



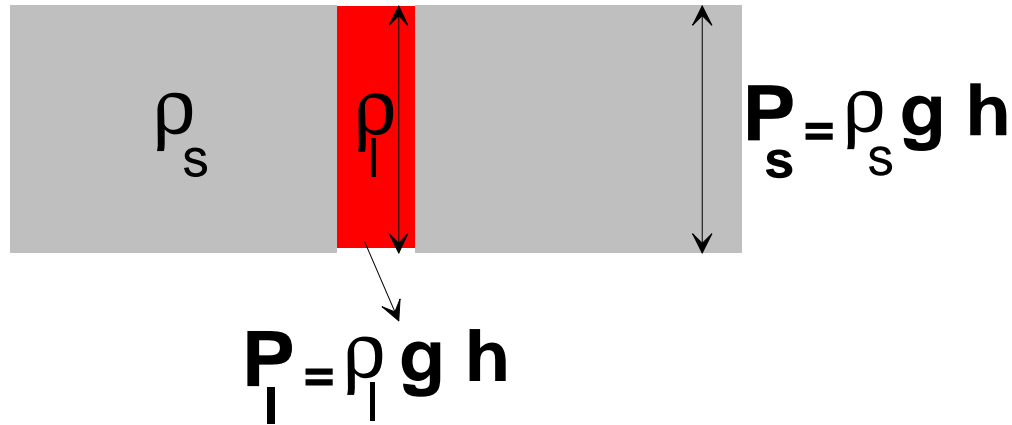
Para el caso del flujo en la astenósfera la viscosidad es del orden de 10^{19} Pas, e involucra una sección del manto de unos 200 km con densidades de 3300 kg/m^3 y velocidades absolutas del orden de cm/año (por ejemplo 5 cm/año). Bajo estas condiciones el número de Reynolds es:

$$\text{Re} = (3300 [\text{kg/m}^3] \times 5 \times 10^{-2} (3600 \times 24 \times 365)^{-1} [\text{m/s}] \times 2 \times 10^5 [\text{m}] / 10^{19} [\text{Pas}])$$

$\text{Re} \sim 10^{-19}$, es decir bajo cualquier condición extrema de velocidad o viscosidad, el flujo en el manto es laminar.

Problema 2: Flujo en una pipa o conducto volcánico.

En este caso el gradiente de presión esta condicionado por la diferencia en densidades entre el sólido y el magma.



Las viscosidades en magmas dependen fuertemente de su composición y contenido de agua:

Magma	T (°C)	$\eta_{\text{dry}}(\text{Pas})$	$\eta_{\text{wet}}(\text{Pas})$
Rhyolite (~70% SiO ₂)	785	10^{11}	10^5 (5% H ₂ O)
Andesite (~58% SiO ₂)	1000	10^3	$10^{2.5}$ (4% H ₂ O)
Basalt (~48% SiO ₂)	1250	10^1	10^1 (4% H ₂ O)

Si el flujo esta condicionado por el gradiente de presión entre el sólido y el líquido:

$$\frac{dP}{dy} = (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_l)g$$

Lo cual implica que las presiones litostáticas e hidrostáticas son iguales. Esto es equivalente a asumir que las paredes de la pipa son libres de deformarse a medida que el magma es liberado.

Bajo este gradiente de presiones la velocidad media para un flujo laminar es:

$$\bar{u} = \frac{R^2}{8\mathbf{m}} (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_l) g$$

En flujo turbulento esta velocidad media se expresa como:

$$\bar{u} = \left[\left(\frac{2R\mathbf{r}_l}{\mathbf{m}} \right)^{0.25} \frac{4R(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_l)g}{\mathbf{r}_l \cdot 0.3164} \right]^{0.57}$$

Para la determinación del contraste en densidad utilizamos el coeficiente de expansión térmica:

$$\mathbf{a}_v = \frac{1}{r} \frac{dr}{dT}$$
$$\Rightarrow \mathbf{r}_l = \mathbf{r}_s \exp^{-\mathbf{a}_v \Delta T}$$

Considerando un coeficiente de expansión de $310^{-5} [^{\circ}\text{K}^{-1}]$, y un gradiente termal de $700 ^{\circ}\text{K}$, (el magma andesítico esta a $1000 ^{\circ}\text{C}$ y la roca de caja a unos 5-10 km de profundidad debería tener una temperatura de cercana a 300°C para un gradiente geotérmico de 30 a $40^{\circ}/\text{km}$ en ambiente de arco).

$$\mathbf{r}_l = 0.9792 \mathbf{r}_s$$

$$(r_s - r_l) = 0.02 r_s$$

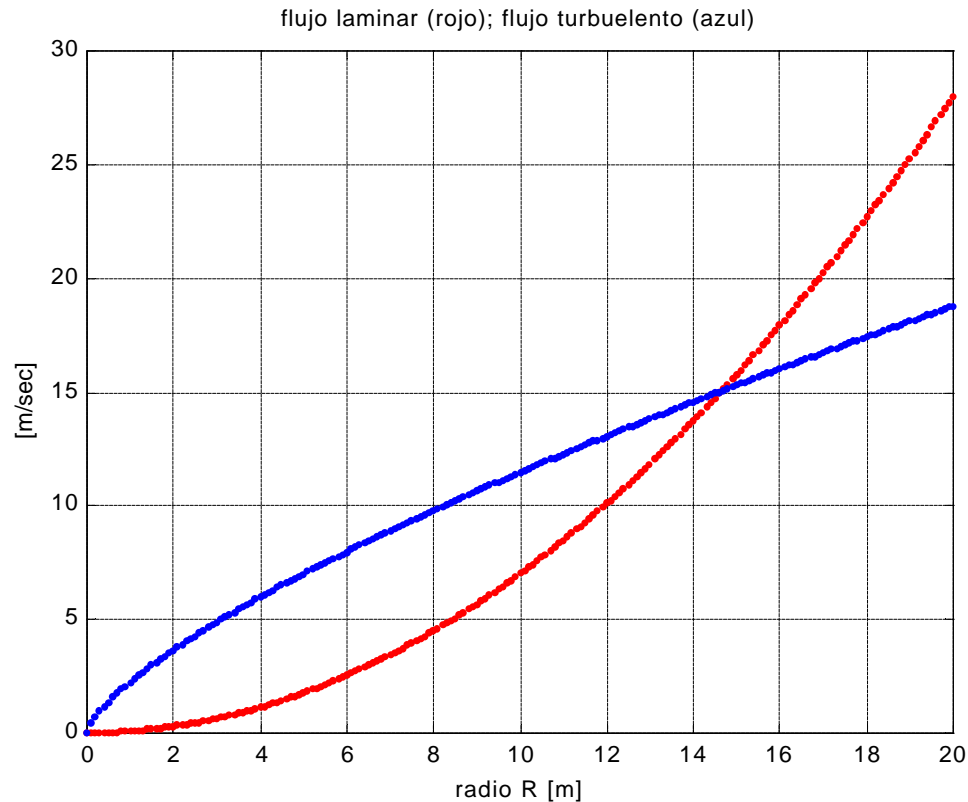
Considerando una densidad de la roca de caja de 2700 Kg/m^3 , el contraste en densidad es de 56 kg/m^3 .

Cabe hacer notar que si el magma es basáltico la densidad del magma se debe establecer con respecto a la densidad del basalto (3300 Kg/m^3). Si bien el contraste termal es mayor en este caso (950°C), la densidad del fluido resultante es de 3200 Kg/m^3 , superior a la densidad de la roca de caja. En consecuencia el ascenso de magmas basálticos no es compatible con un mecanismo de flotabilidad.

Volviendo al caso de un magma andesítico, la velocidad media en régimen laminar y turbulento para una viscosidad de 1000 Pas es exclusivamente función del radio del conducto de ascenso.

$$\bar{u}_{laminar} = 0.07 R^2 [m / s]$$

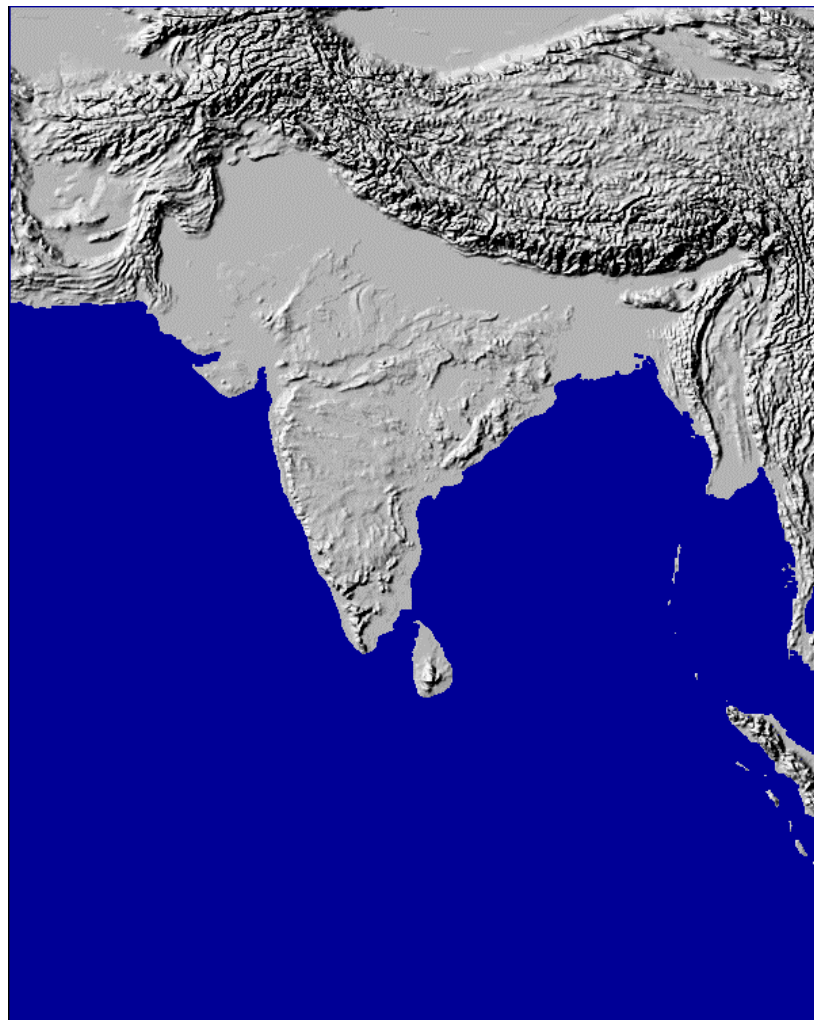
$$\bar{u}_{turbulento} = 2.22 R^{0.7125} [m / s]$$



Las observaciones indican que en general las velocidades de ascenso de los magmas de composición intermedia no superan los cm/sec y en consecuencia el flujo debe ser en general laminar dada la moderadamente alta velocidad. Bajo estas condiciones los conductos de ascenso no deben superar radios mayores que algunos metros.

Ley Constitutiva no-lineal:

Hasta el momento se ha trabajado con una relación lineal entre los esfuerzos y la tasa de deformación, en lo que se denomina un fluido newtoneano. Sin embargo en la naturaleza se reconoce una serie de situaciones en las cuales la deformación tiende a ser mucho mas localizada que la predicción de un flujo newtoniano. Un ejemplo ampliamente estudiado de este tipo de mecanismos es la deformación en los Himalayas. En este caso se observa una fuerte concentración de la deformación inmediatamente al norte del bloque rígido (o “indenter”) de India sobre Asia.



En este caso se verifica una ley no-lineal del tipo:

$$\mathbf{t}^n \propto \dot{u}$$

Para el caso particular del flujo de Poiseville se tiene que:

$$\mathbf{m} \frac{du}{dr} = \mathbf{t}^n$$

Habíamos visto previamente que el equilibrio de fuerzas de presión y superficiales correspondía a:

$$\mathbf{t} = \frac{r}{2} \frac{dP}{dx}$$

De tal forma que la relación presión-velocidad define una ecuación no-lineal del tipo:

$$\mathbf{m} \frac{du}{dr} = \left[\frac{r}{2} \frac{dP}{dx} \right]^n$$

Integrando esta ecuación diferencial se obtiene:

$$u(r) = \frac{1}{\mathbf{m}} \left[\frac{dP}{dx} \right]^n \frac{r^{n+1}}{2^n (n+1)} + c$$

Si se impone una velocidad nula en los bordes de la cañería, la evaluación de la condición de borde ($u(r=R)=0$) tiene por resultante la siguiente expresión para la velocidad:

$$u(r) = -\frac{1}{\mathbf{m}} \left[\frac{dP}{dx} \right]^n \frac{1}{2^n (n+1)} \left[R^{n+1} - r^{n+1} \right]$$

Si consideramos $n=1$, recuperamos la expresión de la velocidad para un flujo newtoniano.

Para normalizar las velocidades c/r a su valor medio integramos la función de velocidades anterior:

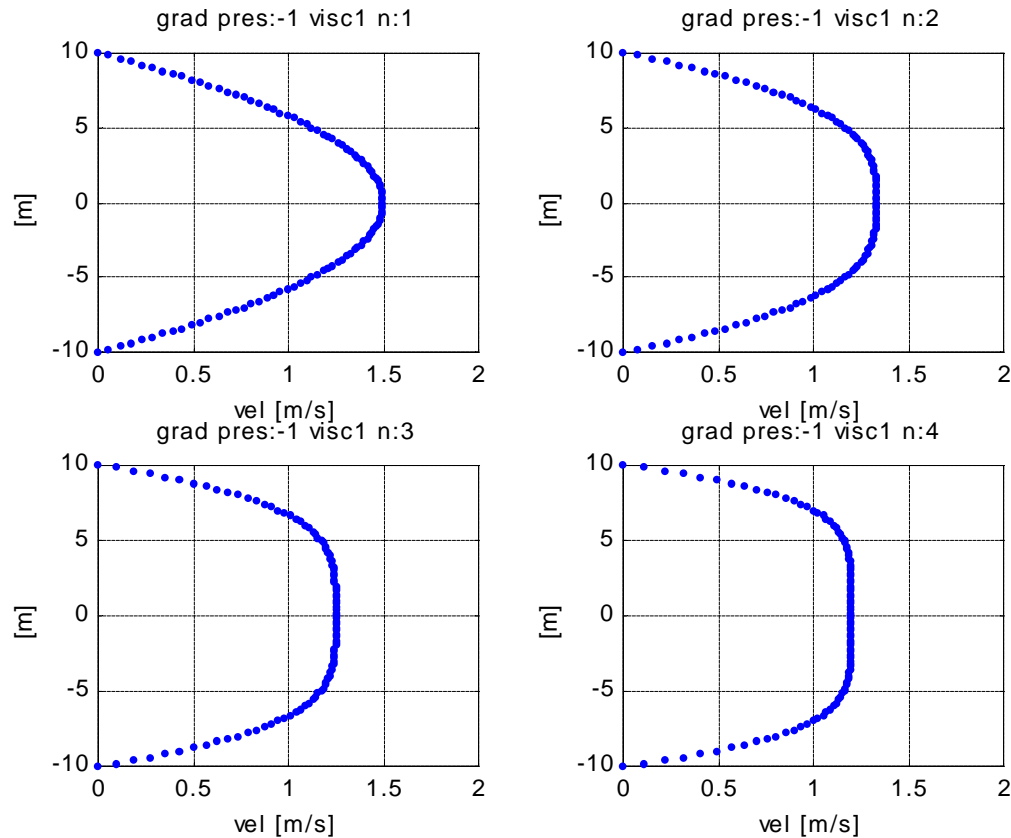
$$\bar{u} = \int_0^K u(r) dr \Rightarrow$$

$$\bar{u} = -\frac{1}{\mathbf{m}} \left[\frac{dP}{dx} \right]^n \frac{1}{2^n (n+1)} \left[R^{n+1} - \frac{R^{n+1}}{n+2} \right]$$

Tal que:

$$u' = \frac{u(r)}{\bar{u}} = \frac{(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1})}{1 - 1/(n+2)}$$

En la figura siguiente se presenta la solución normalizada de la velocidad para condiciones crecientes de no-linealidad. Vemos que a medida que n aumenta la deformación tiende a concentrarse en los bordes, en donde el gradiente de velocidades es mayor, y por consiguiente el esfuerzo es mayor.



Esta diferencia se debe a que la viscosidad efectiva es mayor en el centro que en los bordes. La viscosidad efectiva se define como la razón entre el esfuerzo y la tasa de deformación:

$$m_{eff} = \tau / \dot{\epsilon} = \frac{\tau}{du / dx} = \tau^{1/n}$$

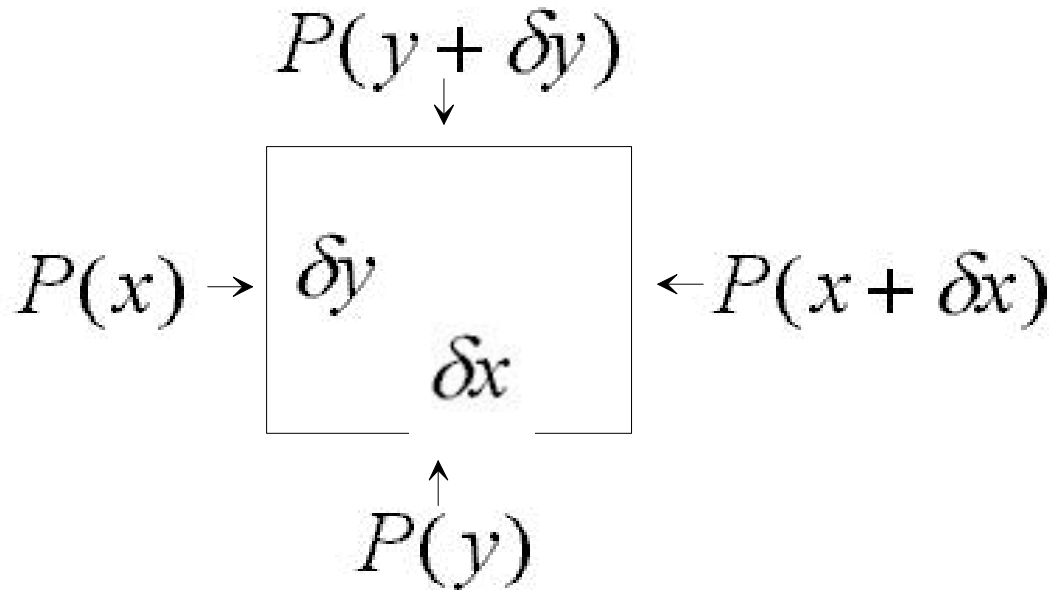
Para $n=1$ la viscosidad efectiva es simplemente la viscosidad del fluido, para valores de n mayores la viscosidad efectiva aumenta en las zonas de menor esfuerzo. Cerca del borde de la cañería el gradiente de velocidades es mayor, y por consiguiente el esfuerzo es mayor y la viscosidad efectiva disminuye.

Como veremos mas adelante un comportamiento análogo permite explicar la concentración de la deformación en los Himalayas.

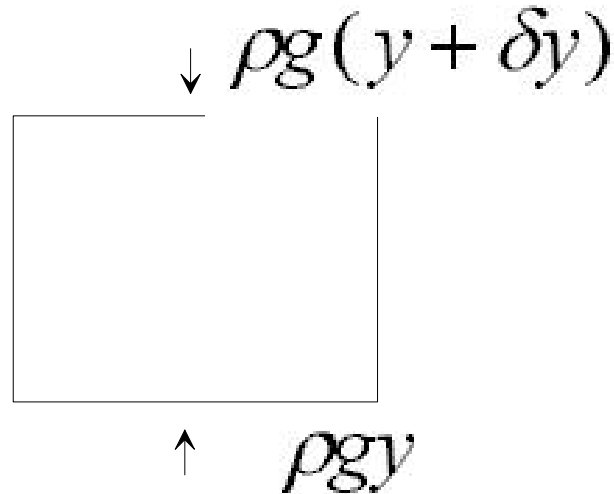
GENERALIZACIÓN DEL BALANCE DE FUERZAS EN 2-D

La generalización del balance de fuerzas en 2-D considera un diferencial de área sobre el cual actúan fuerzas de presión, fuerzas de superficie (esfuerzos), y una nueva componente que corresponde a las fuerzas de gravedad o de cuerpo (“body force”) que dan cuenta del aporte de contrastes en densidad en el medio.

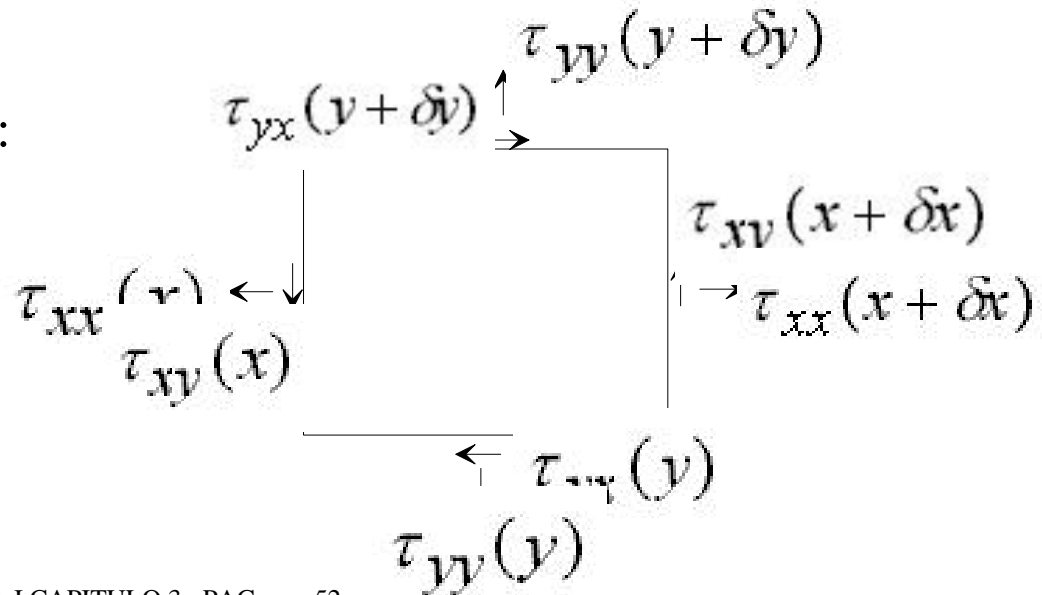
-Presión:



- Fuerzas de Cuerpo:



- Fuerzas de superficie:



Utilizando la aproximación de Taylor ya expuesta para el caso de 1-D, se obtienen los siguientes equilibrios de fuerzas en las direcciones x e y:

$$x : -\frac{dP}{dx} + \frac{d\mathbf{t}_{xx}}{dx} + \frac{d\mathbf{t}_{xy}}{dy} = 0$$

$$y : -\frac{dP}{dy} + \frac{d\mathbf{t}_{yy}}{dy} + \frac{d\mathbf{t}_{xy}}{dx} = -\mathbf{r}g$$

Generalizando las leyes constitutivas para el caso 2-D:

$$t_{xx} = \mathbf{m} \frac{du}{dx}; = t_{yy} = \mathbf{m} \frac{dv}{dy};$$

$$t_{xy} = t_{yx} = \mathbf{m} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right);$$

Utilizando esta ley constitutiva newtoniana podemos expresar la ecuación de movimiento en términos de las velocidades horizontales (u) y verticales (v):

$$x: -\frac{dP}{dx} + 2\mathbf{m} \frac{d^2u}{dx^2} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2v}{dxdy} \right] = 0$$

$$y: -\frac{dP}{dy} + 2\mathbf{m} \frac{d^2v}{dy^2} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2u}{dydx} + \frac{d^2v}{dy^2} \right] = -\mathbf{r}g$$

Esta relación se puede simplificar aun mas considerando la relación de continuidad:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2} = - \frac{d^2 v}{dy dx}; \left\langle / \frac{d}{dx} \right\rangle$$

$$\frac{d^2 u}{dx dy} = - \frac{d^2 v}{dy^2}; \left\langle / \frac{d}{dy} \right\rangle$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento podemos desacoplar las componentes horizontales y verticales de la velocidad:

$$x: -\frac{dP}{dx} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right] = 0$$

$$y: -\frac{dP}{dy} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} \right] = -\mathbf{r}g$$

La presión hidrostática (asociada a la densidad) puede ser eliminada considerando la siguiente transformación:

P'=P-ρgy: Presión producto del flujo viscoso.

Es decir la en ausencia de fuerzas externas, la presión hidro-estática no puede generar movimiento ya que es compensada por la presión en cada punto.

Mediante esta transformación:

$$\frac{dP'}{dx} = \frac{dP}{dx}; \frac{dP'}{dy} = \frac{dP}{dy} - \mathbf{r}g \Rightarrow$$

$$x: -\frac{dP'}{dx} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right] = -\frac{dP'}{dx} + \mathbf{m} \nabla^2 u = 0$$

$$y: -\frac{dP'}{dy} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} \right] = -\frac{dP'}{dy} + \mathbf{m} \nabla^2 v = 0$$

Esta ecuación diferencial es híbrida ya que se expresa en función de las velocidades y las presiones. Una forma de resolverla para problemas simples en los cuales la viscosidad es constante, es mediante la definición de las funciones corriente:

$$u = -\frac{d\mathbf{f}}{dy}; v = \frac{d\mathbf{f}}{dx} \Rightarrow$$

$$x: -\frac{d^2 P'}{dxdy} + \mu \left[\frac{d^4 \mathbf{f}}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 \mathbf{f}}{dy^4} \right] = 0; \left\langle / \frac{d}{dy} \right\rangle$$

$$y: -\frac{d^2 P'}{dydx} + \mu \left[\frac{d^4 \mathbf{f}}{dx^4} + \frac{d^4 \mathbf{f}}{dy^2 dx^2} \right] = 0; \left\langle / \frac{d}{dx} \right\rangle$$

Si se suman ambas ecuaciones se obtiene una ecuación diferencial en la función corriente:

$$\mathbf{m} \left[\frac{d^4 \mathbf{f}}{dx^4} + 2 \frac{d^4 \mathbf{f}}{dy^2 dx^2} + \frac{d^4 \mathbf{f}}{dy^4} \right] = \nabla^2 \nabla^2 \mathbf{f} = 0$$

(ecuación bi-harmonica)

La función corriente tiene la propiedad de cumplir naturalmente la condición de continuidad ($\text{div}(\mathbf{u})=0$), y además tiene un sentido físico explícito ya que son paralelas al flujo. Adicionalmente la morfología de las líneas de flujo indican ambientes de mayor velocidad (cuando se juntan las líneas de flujo) o menor velocidad (cuando estas se separan).

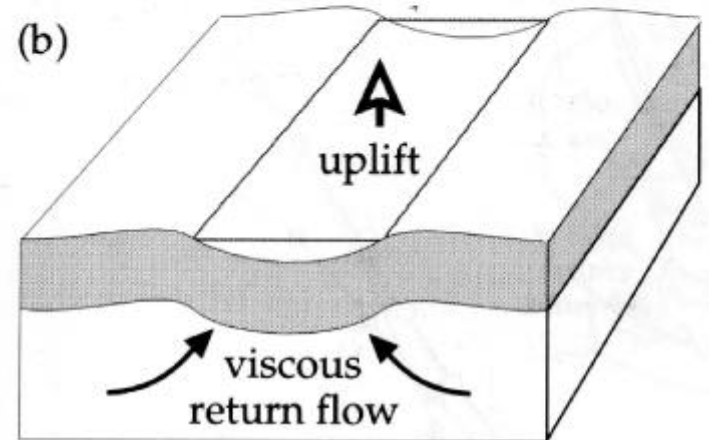
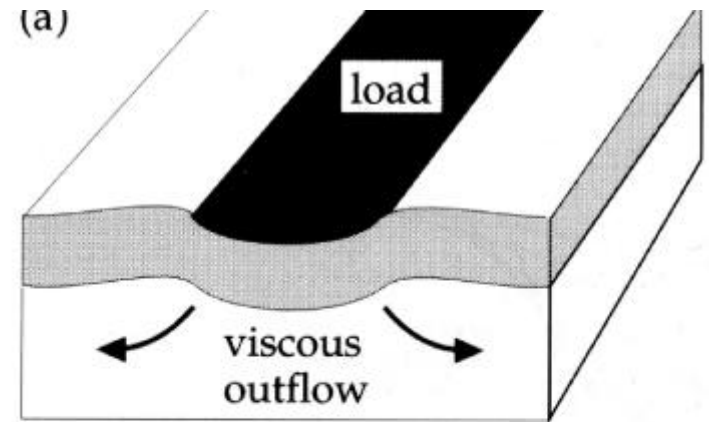
Es interesante visualizar además que la solución del campo de corrientes de flujo es independiente de la viscosidad, sin embargo al establecer las

condiciones de borde la viscosidad del problema caracteriza el patrón de flujo (solo la forma del flujo es independiente de la viscosidad).

Problema 3: Rebote isostático post-glacial

Como se había mencionado en clases anteriores, el abrupto deshielo post-glacial permite estimar la viscosidad del manto en función del tiempo requerido por el manto para ocupar el espacio liberado por la sobrecarga de hielo.

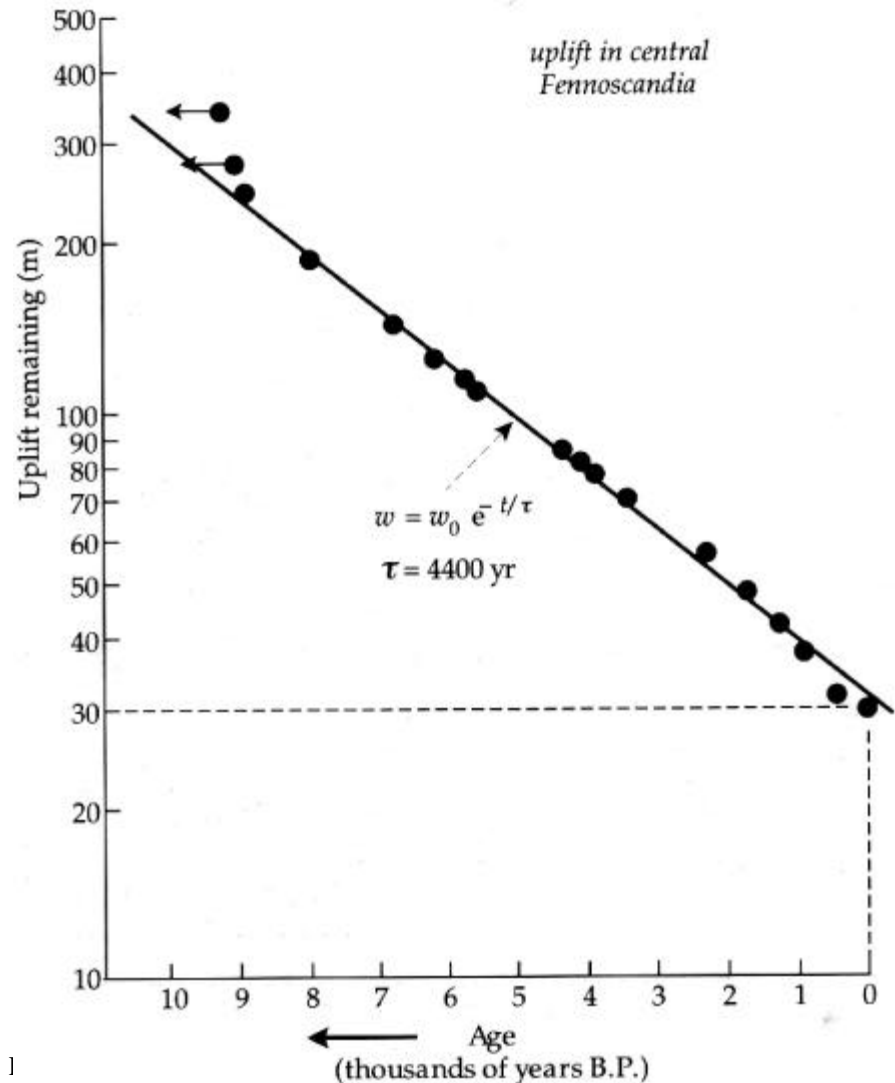
Este fenómeno de rebote isostático se ha podido distinguir en terrazas antiguas asociadas a lagos que corresponden al producto final de un glaciar en retroceso (como por ejemplo en Escandinavia).





La datación radiométrica de estas terrazas ha permitido establecer un mecanismo de ajuste isostático con escalas de tiempo de algunos miles de años.

Utilizando las ecuaciones de flujo viscoso en 2-D podemos modelar el comportamiento del flujo en el manto como producto de una descarga repentina de la masa de hielo que esta deprimiendo la litósfera.

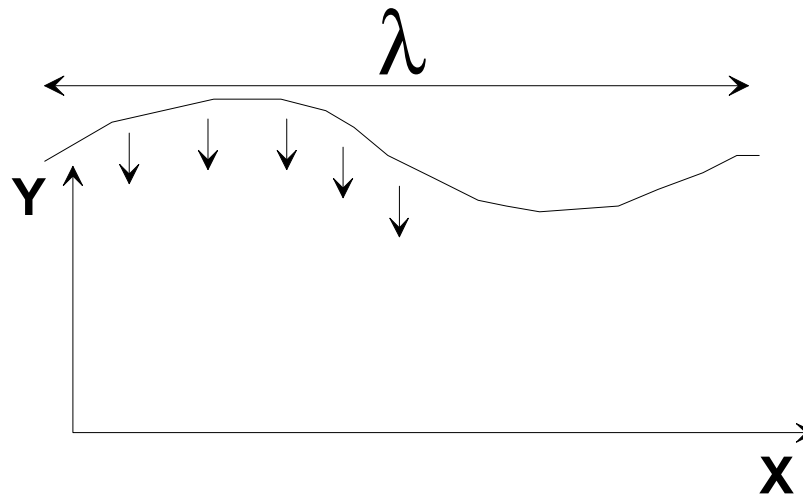


$$\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{f} = 0$$

Asumiendo una carga sinusoidal de longitud de onda λ , tal que:

$$w_n = w_{n_o} \cos(2\pi x / \lambda)$$

Para una perturbación de estas características, la solución de la ecuación bi-harmónica:



Esta dada por:

$$f = \sin\left(\frac{2px}{l}\right) \left[Ae^{-2py/l} + Bye^{-2py/l} + Ce^{2py/l} + Dye^{2py/l} \right]$$

Como el desplazamiento debe ser nulo para $y \rightarrow -\infty$, entonces A y B son nulos, tal que.

$$f = \sin\left(\frac{2px}{l}\right) e^{2py/l} [C + Dy]$$

Como la litósfera es elástica, debe cumplirse la condición de velocidad nula en sentido horizontal para $y=0$ (base de la litósfera rígida y techo de la astenósfera fluida).

$$u(x, y) = -\frac{d\mathbf{f}}{dy} = \sin\left(\frac{2\mathbf{p}x}{l}\right) \left(\frac{2\mathbf{p}}{l} [C + Dy] + D \right) e^{2\mathbf{p}y/l}$$

$$\Rightarrow u(x, y = 0) = 0 = \frac{2\mathbf{p}}{l} C + D \Rightarrow D = -\frac{2\mathbf{p}}{l} C$$

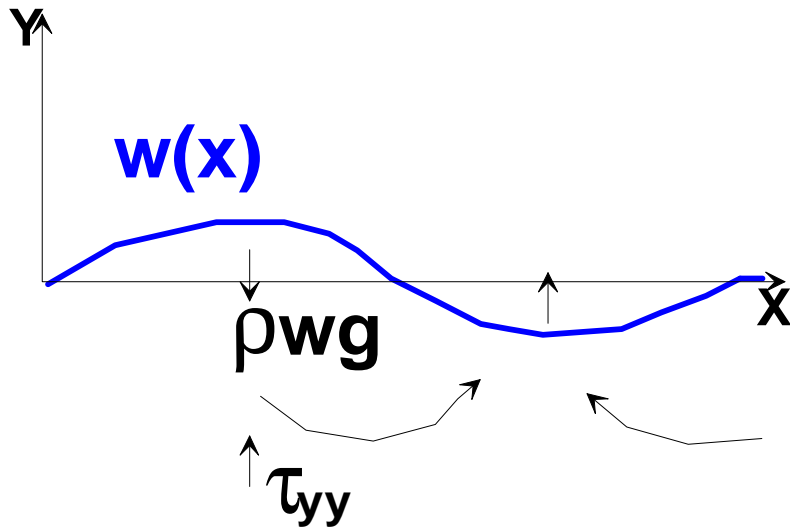
De esta forma podemos expresar la función corriente y las velocidades en función de una sola constante de integración C:

$$f = C \sin\left(\frac{2px}{l}\right) \left(1 - \frac{2py}{l}\right) e^{2py/l}$$

$$u(x, y) = -\frac{df}{dy} = -C \sin\left(\frac{2px}{l}\right) \left(\frac{2p}{l}\right)^2 y \cdot e^{2py/l}$$

$$v(x, y) = \frac{df}{dx} = C \cos\left(\frac{2px}{l}\right) \left(\frac{2p}{l} \left(1 - \frac{2py}{l}\right)\right) \cdot e^{2py/l}$$

Para determinar la constante C hay que utilizar la condición de equilibrio de fuerzas entre la columna hidrostática asociada con la topografía $w(x)$ y el esfuerzo normal en la superficie superior del fluido.



$$t_{yy} = P - 2\mathbf{m} \frac{dv}{dy} = -\mathbf{r} g w$$

Pero por la ecuación de movimiento sabemos que el gradiente horizontal de presión es:

$$\frac{dP}{dx} = \mathbf{m} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right]$$

La expresión de la velocidad horizontal $u(x,y)$ se conoce en función de la constante C , en consecuencia puede ser diferenciado c/r a x e y , y luego integrado c/r a x para obtener P :

$$P = 2mC \left(\frac{2p}{l} \right)^2 \cos\left(\frac{2px}{l}\right)$$

Por otra parte el gradiente vertical de velocidad vertical es nulo en la base de la litósfera (por condición de continuidad ya que la velocidad horizontal y su gradiente son nulos). En consecuencia podemos expresar la constante C en

$$C(w) = \frac{wrg}{2m \left(\frac{2p}{l} \right)^2 \cos\left(\frac{2px}{l}\right)}$$

función de la deflexión de la superficie $w(x)$:

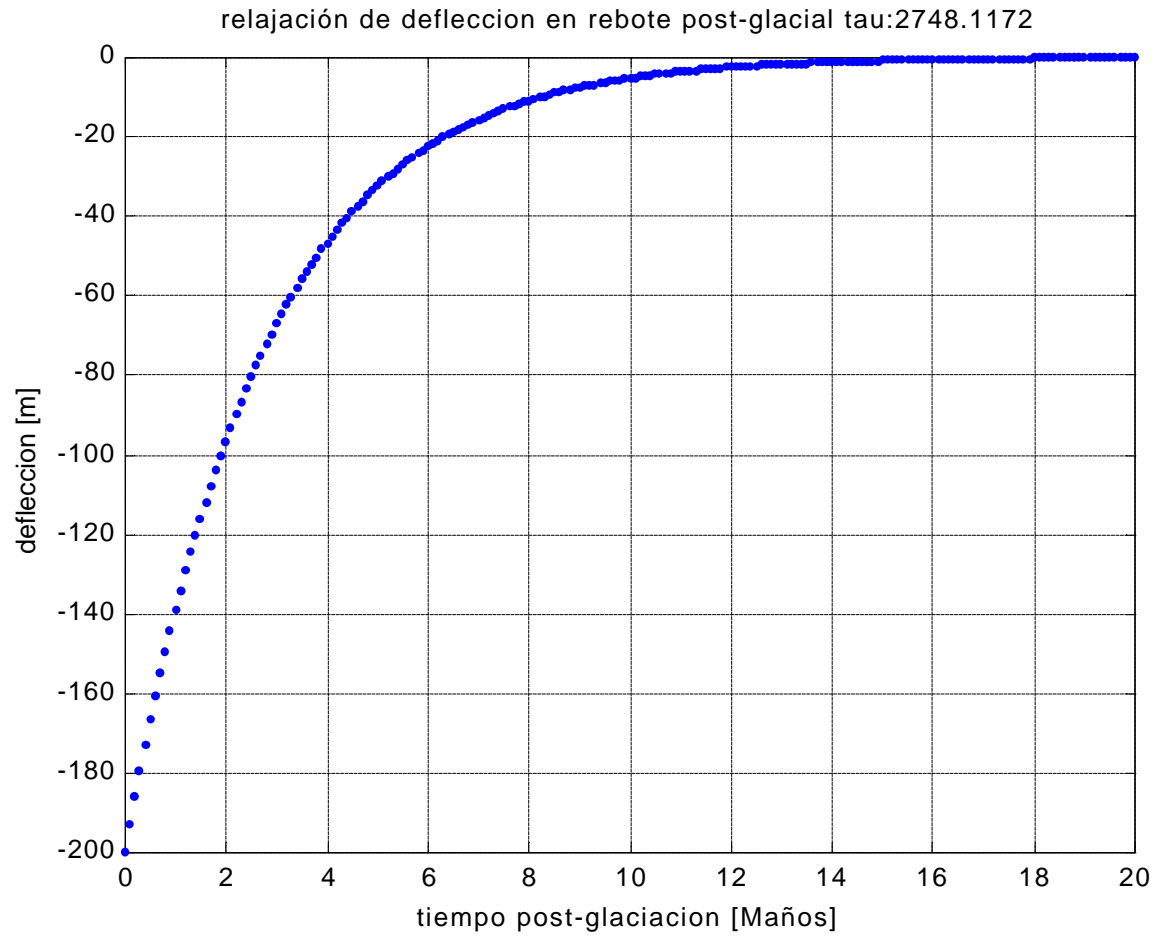
Por otra parte la velocidad vertical en el fluido corresponde a la derivada temporal de la deflexión $w(x)$:

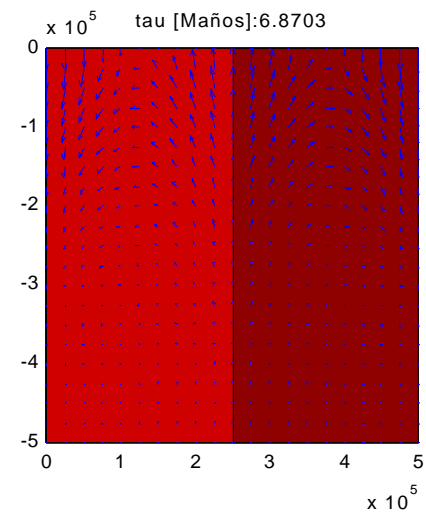
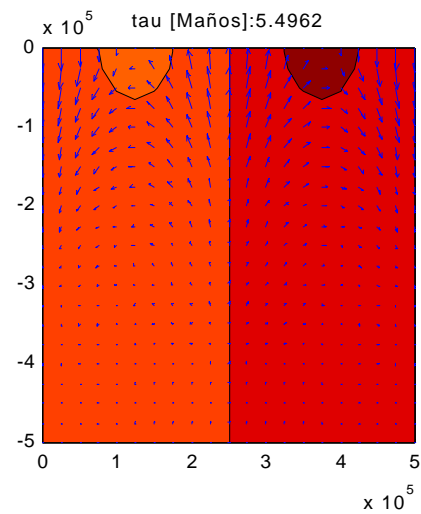
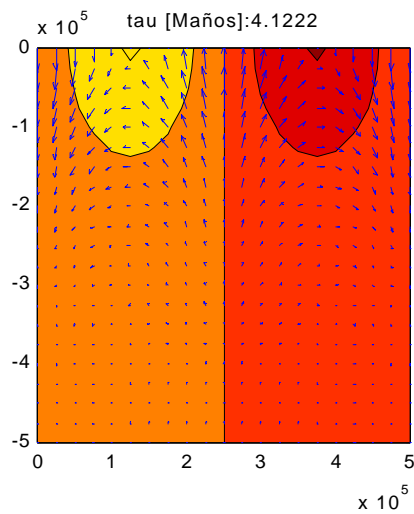
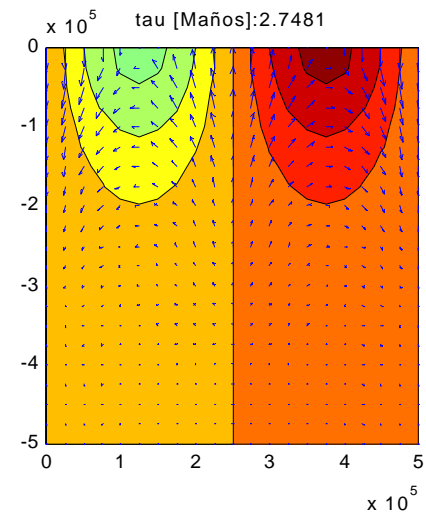
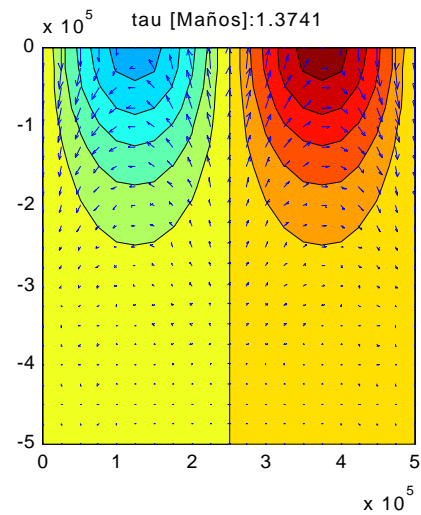
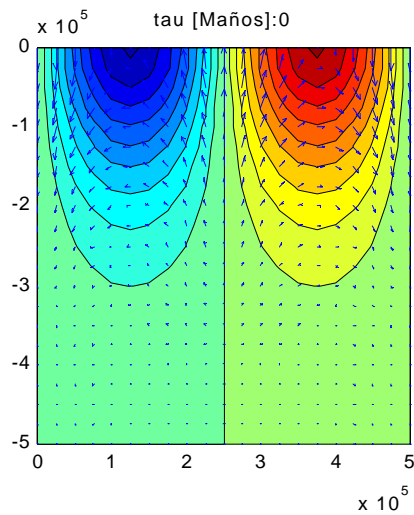
$$v(y=0) = \frac{dw}{dt} = \frac{-wrgl}{4pm}$$

Esta ecuación diferencial se integra obteniendo la evolución de la deflexión en el tiempo considerando una deflexión original w_o al momento de la descarga de la masa de hielo:

$$w(t) = -w_o \exp\left(\frac{-lrg}{4pm}t\right) = -w_o \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right); \quad \tau = \left[\frac{lrg}{4pm}\right]^{-1}$$

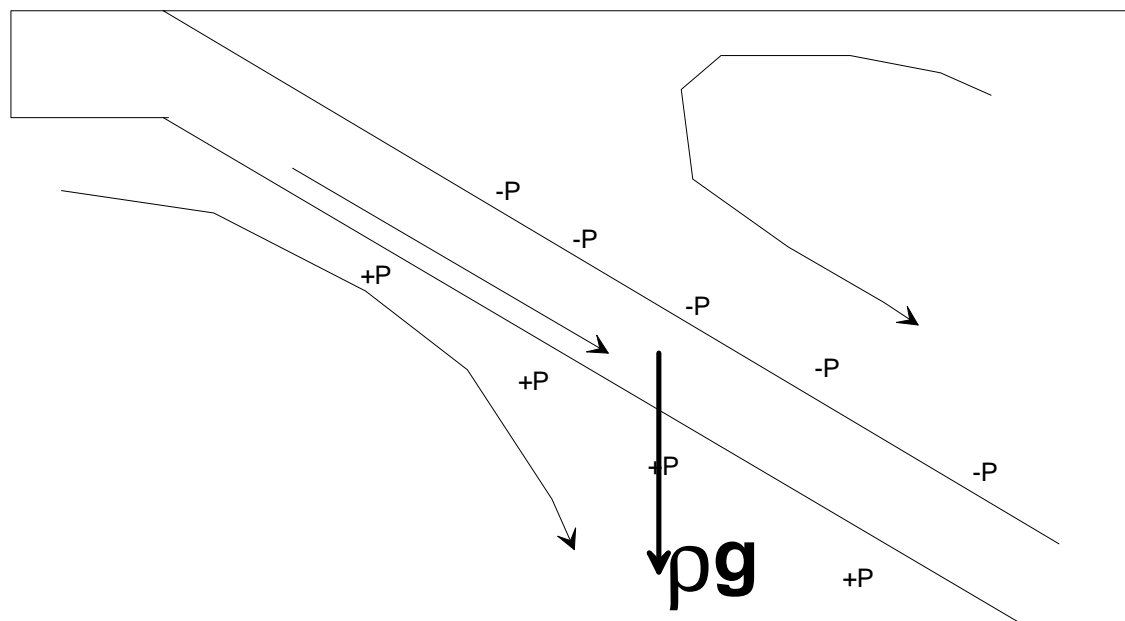
τ es el tiempo de relajación característico.





Problema 5: Flujo esquina en astenosfera en ambiente de subducción

En zonas de subducción la inclinación de la placa subductada no es 90° , existiendo un soporte dinámico ejercido por una presión negativa en el flujo forzado de la astenosfera aledaña a la placa subductada.



Para entender este proceso debemos resolver la ecuación bi-harmónica en coordenadas polares:

$$\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{f} = \nabla^2 \left(\frac{d^2 \mathbf{f}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{f}}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \mathbf{f}}{d\mathbf{q}^2} \right) = 0$$

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{q}}; u_{\mathbf{q}} = -\frac{d\mathbf{f}}{dr}$$

La solución general de esta ecuación mediante el método de separación de variables corresponde a:

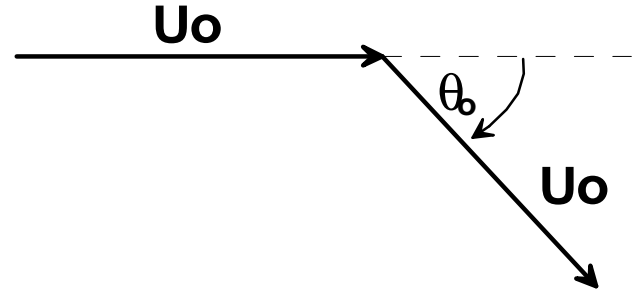
$$\mathbf{f} = u_o \cdot r \cdot f(\mathbf{q})$$

$$f(\mathbf{q}) = c_1 \sin(\mathbf{q}) + c_2 \mathbf{q} \sin(\mathbf{q}) + c_3 \cos(\mathbf{q}) + c_4 \mathbf{q} \cos(\mathbf{q})$$

$$u_r = u_o f'(\mathbf{q}); u_{\mathbf{q}} = -u_o f(\mathbf{q})$$

A fin de resolver las constantes de integración del problema se subdivide el ambiente de flujo de esquina en dos sectores con sus correspondientes condiciones de borde:

Sector I: Flujo en cuña oceánica:



$$u_{\mathbf{q}} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q} = \mathbf{q}_o \\ \mathbf{q} = \mathbf{p} \end{array} \right\}$$

$$u_r = u_o \{ \mathbf{q} = \mathbf{q}_o \}$$

$$u_r = -u_o \{ \mathbf{q} = \mathbf{p} \}$$

Expresando entonces matricialmente las condiciones de borde para el medio I:

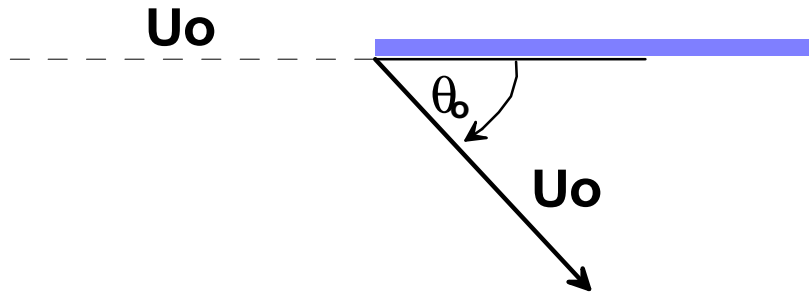
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -p \\ -\sin \mathbf{q}_o & -\mathbf{q}_o \sin \mathbf{q}_o & -\cos \mathbf{q}_o & -\mathbf{q}_o \cos \mathbf{q}_o \\ -1 & p & 0 & -1 \\ \cos \mathbf{q}_o & \begin{pmatrix} \sin \mathbf{q}_o + \\ \mathbf{q}_o \cos \mathbf{q}_o \end{pmatrix} & -\sin \mathbf{q}_o & \begin{pmatrix} \cos \mathbf{q}_o - \\ \mathbf{q}_o \sin \mathbf{q}_o \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^1 \\ C_2^1 \\ C_3^1 \\ C_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sector II: Flujo en cuña continental:

$$u_{\mathbf{q}} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q} = \mathbf{q}_o \\ \mathbf{q} = 0 \end{array} \right\}$$

$$u_r = u_o \{ \mathbf{q} = \mathbf{q}_o \}$$

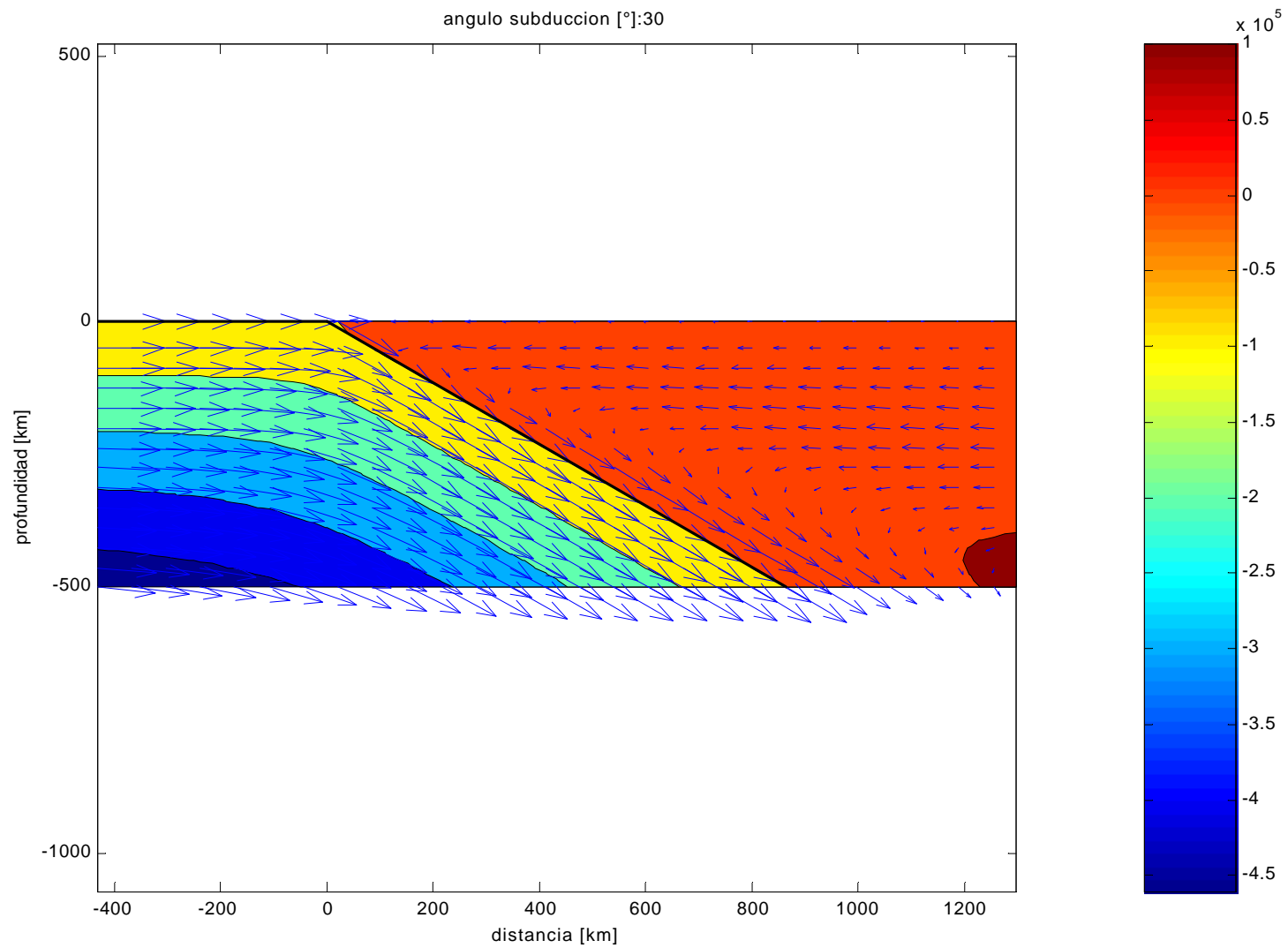
$$u_r = 0 \{ \mathbf{q} = 0 \}$$

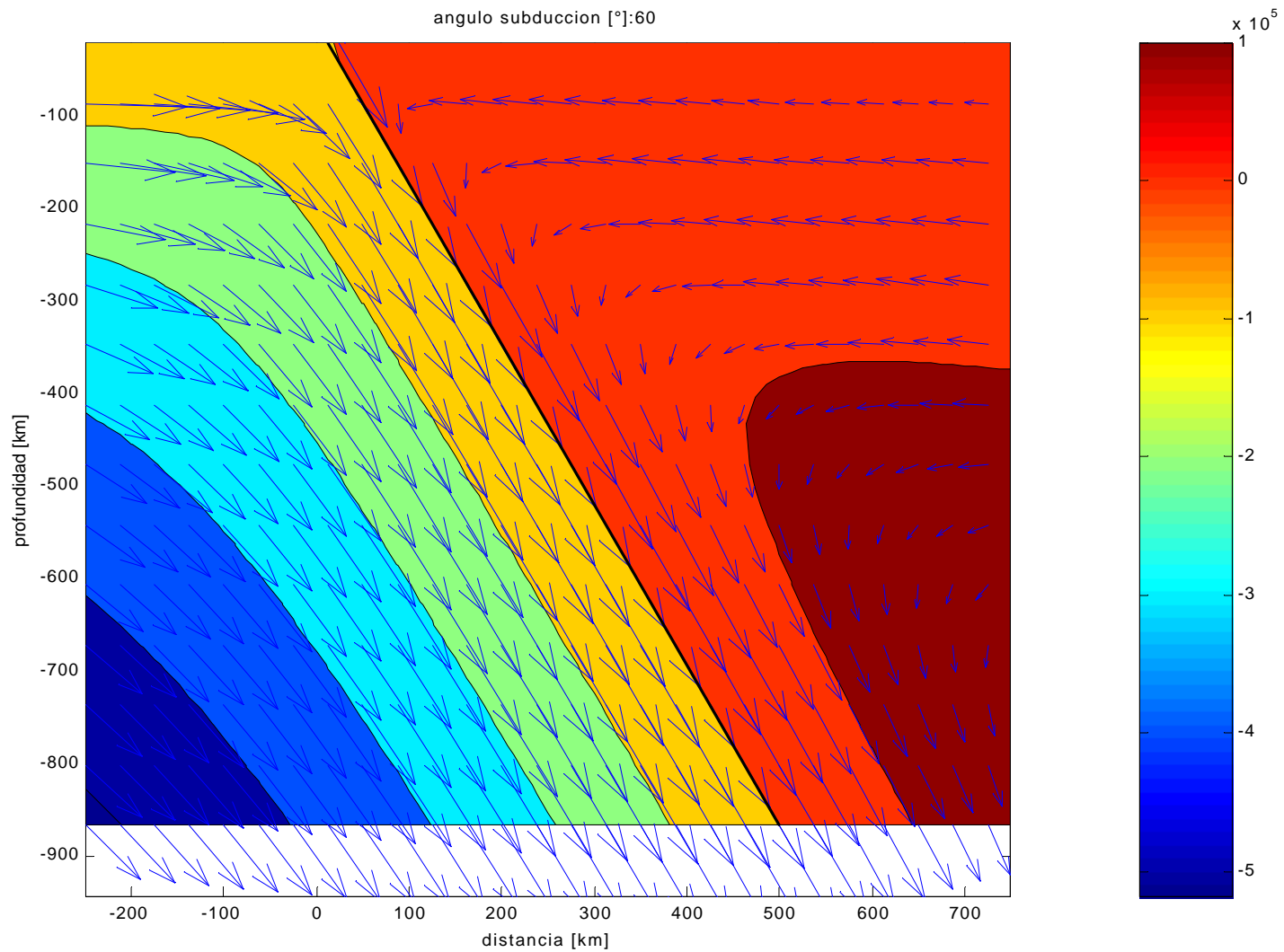


Expresando entonces matricialmente las condiciones de borde para el medio II:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\sin \mathbf{q}_o & -\mathbf{q}_o \sin \mathbf{q}_o & -\cos \mathbf{q}_o & -\mathbf{q}_o \cos \mathbf{q}_o \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cos \mathbf{q}_o & \begin{pmatrix} \sin \mathbf{q}_o + \\ \mathbf{q}_o \cos \mathbf{q}_o \end{pmatrix} & -\sin \mathbf{q}_o & \begin{pmatrix} \cos \mathbf{q}_o - \\ \mathbf{q}_o \sin \mathbf{q}_o \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^2 \\ C_2^2 \\ C_3^2 \\ C_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La evaluación de los coeficientes para ambos medios en un determinado ángulo de subducción nos permiten definir el patrón del flujo astenosférico forzado por la subducción de la placa oceánica:





Para determinar la presión ejercida sobre las paredes de la placa subductada recurrimos a la ecuación de fuerza en coordenadas polares:

$$-\frac{dP}{dr} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 u_r}{d\mathbf{q}^2} \right] = 0$$

$$u_r = u_o f'(\mathbf{q}) \Rightarrow \frac{d}{dr} \equiv 0$$

$$\frac{dP}{dr} = \mathbf{m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d^2 u_r}{d\mathbf{q}^2} \right] = \frac{\mathbf{m} u_o}{r^2} f''''(\mathbf{q})$$

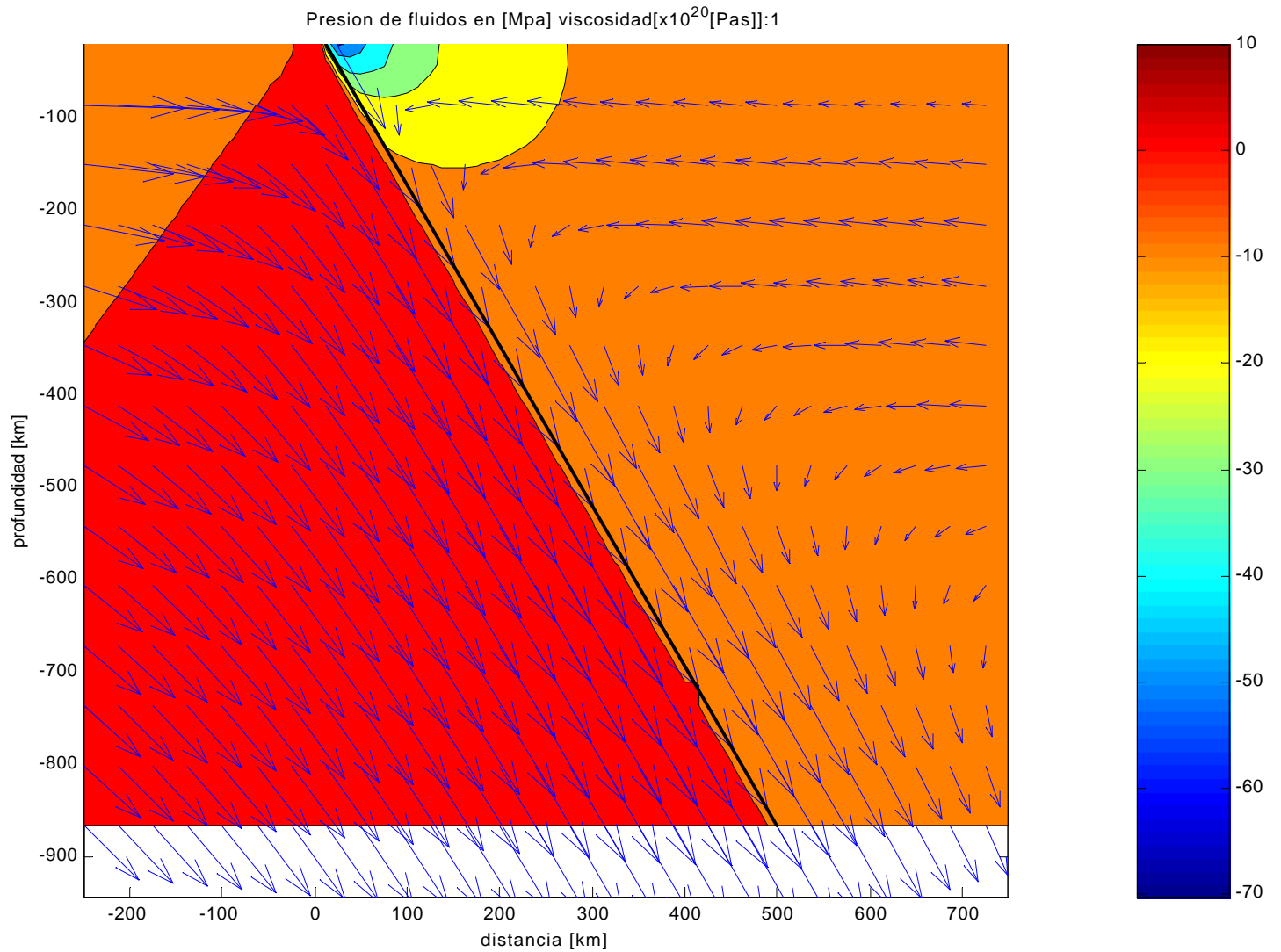
De esta forma podemos integrar la presión c/r a r:

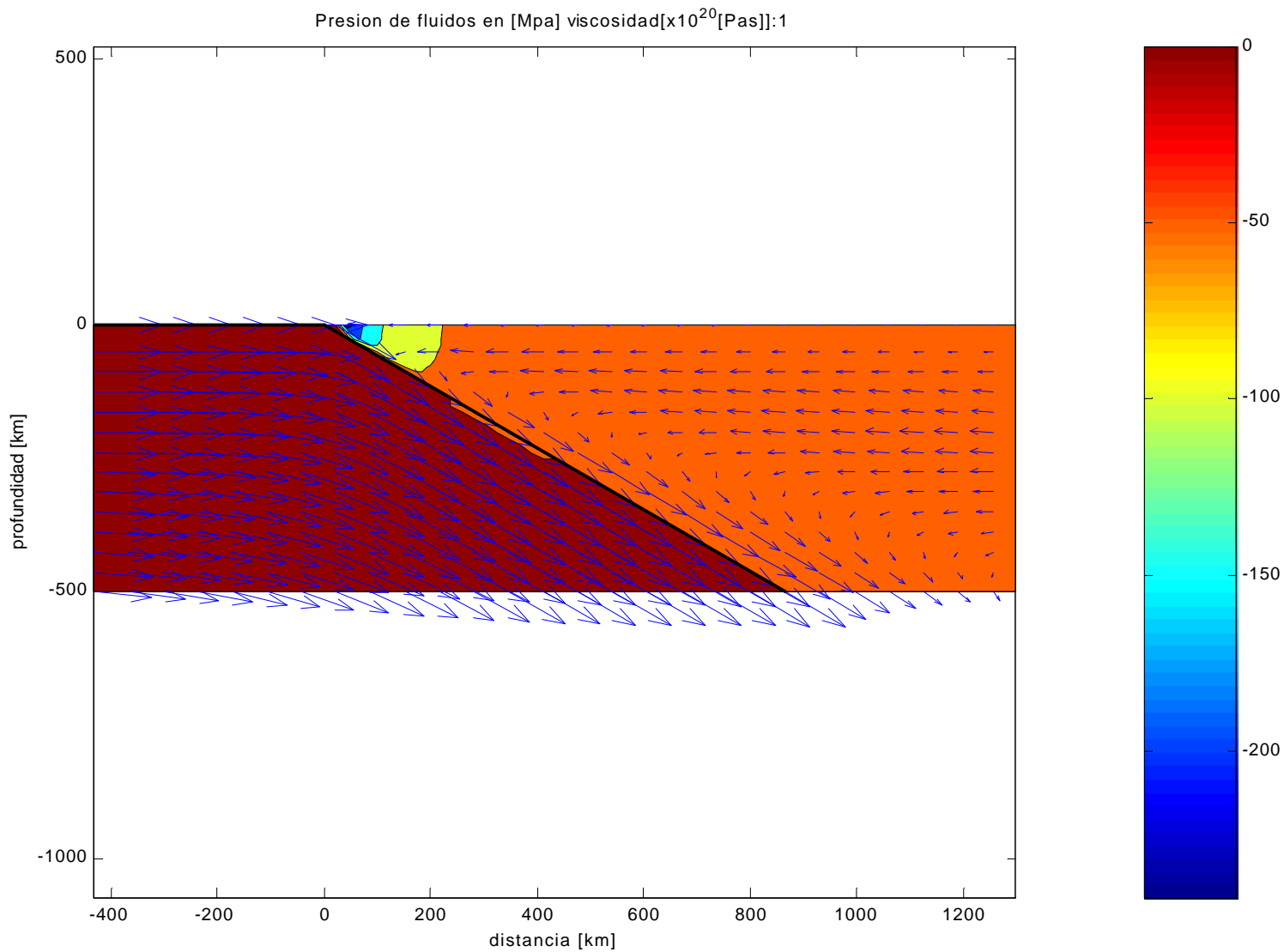
$$P = - \frac{\mu_o f'''(\mathbf{q})}{r}$$

La tercera derivada de $f(\theta)$ c/r a θ es:

$$\begin{aligned} f'''(\mathbf{q}) = & -c_1 \cos(\mathbf{q}) + c_2 [-3 \sin(\mathbf{q}) - \mathbf{q} \cos(\mathbf{q})] \\ & + c_3 \sin(\mathbf{q}) + c_4 [-3 \cos(\mathbf{q}) + \mathbf{q} \sin(\mathbf{q})] \end{aligned}$$

Con esta expresión de P podemos evaluar la presión en los sectores I y II reemplazando las constantes de integración correspondientes a cada sector.



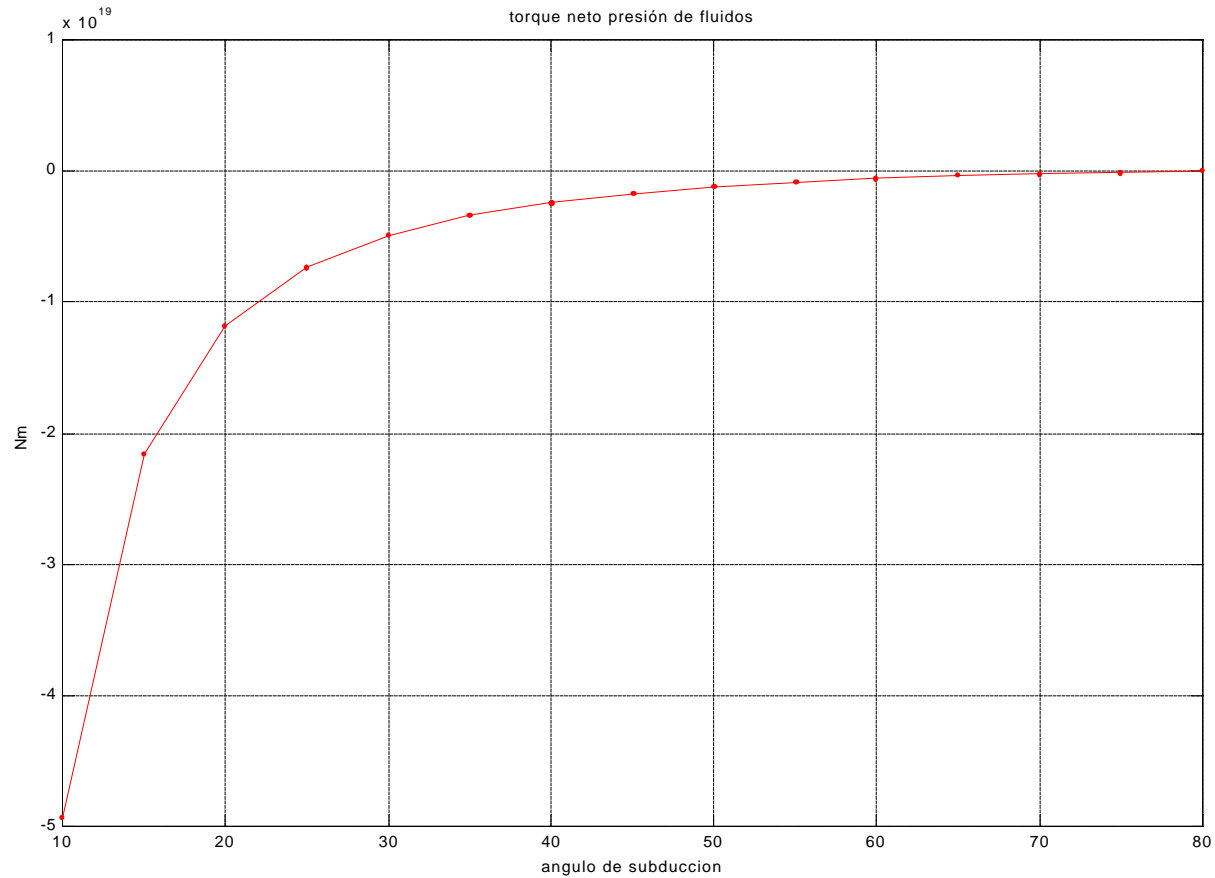


La presión de fluidos en la cuña continental es negativa es decir tiende a sostener la placa subductada contra el efecto de la gravedad. A su vez en la cuña oceánica la presión es marginalmente negativa por tanto también coopera (aunque en menor medida) al sostenimiento de un ángulo de subducción distinto de 90 grados. Para ángulos de subducción pequeños la presión de fluidos es un orden de magnitud superior que en ángulos de subducción sub-verticales, esta mayor competencia de la presión de fluidos para planos de subducción menores es exactamente lo que se requiere ya que en estos casos el torque ejercido por el peso de la placa es mayor.

El torque neto es la integral de $P(r)$ en ambas caras del plano de subducción a lo largo del plano L :

$$T_{P_fluido} = -\mu_o \int_0^L \frac{rdr}{r} [f_I'''(\mathbf{q}_o) + f_{II}'''(\mathbf{q}_o)]$$

$$= -\mu_o L [f_I'''(\mathbf{q}_o) + f_{II}'''(\mathbf{q}_o)]$$



Este torque debe estar equilibrado por el torque asociado al peso de la placa subductada (de ancho w):

$$T_{\text{peso}} = \mathbf{r}g \cos(\mathbf{q}_o) \mathbf{w} \int_0^L r dr = \mathbf{r}g \cos(\mathbf{q}_o) \mathbf{w} \frac{L^2}{2}$$

Utilizando un contraste medio de temperatura de 500°C con respecto al entorno y un coeficiente de expansión térmica de $3 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$, se obtiene un contraste de densidad de 60 Kg/m^3 , con $L=600 \text{ km}$ y $w=100 \text{ km}$, se obtiene un torque de $1.3 \cos(\theta_o) \times 10^{19} \text{ [Nm]}$.

Es decir para una viscosidad de 10^{20} [Pas] se obtendría una condición de equilibrio para un ángulo cercano a 20° . Para viscosidades inferiores o placas con un mayor contraste termal el ángulo de equilibrio será mayor, tal cual se aprecia por ejemplo en el pacifico occidental.

El cizalle en la base de la litósfera continental (ángulo cero en sector II) es un importante parámetro ya que ayuda a entender la influencia del flujo astenosférico en la placa continental, y por ejemplo evaluar las condiciones

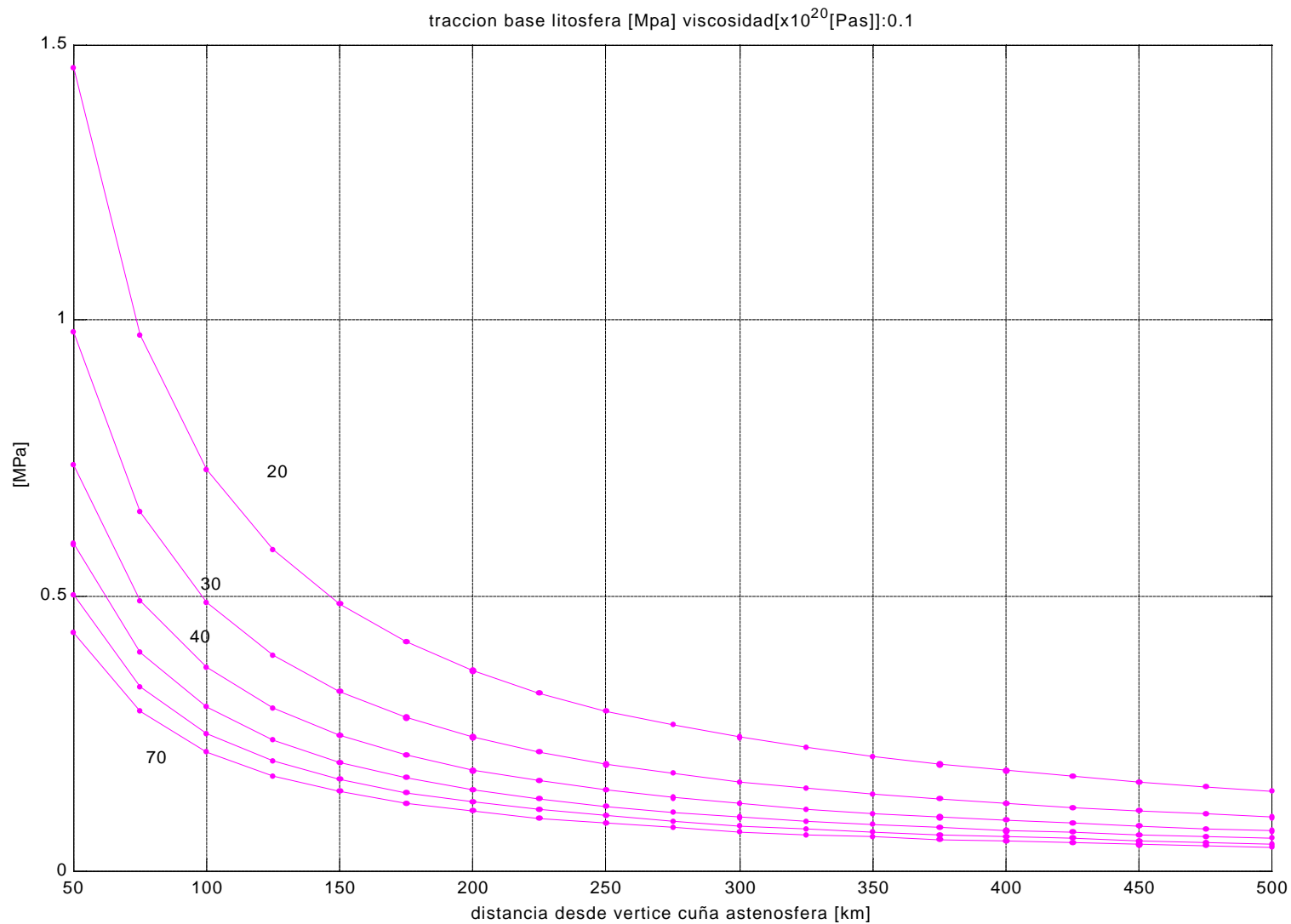
en las cuales se desarrollan cuencas de tras-arco (p. Ej., en Japón, las Marianas, etc.).

La tracción en la base de la litósfera corresponde a:

$$\mathbf{t} = \mathbf{m} \left[\frac{1}{r} \frac{du_r}{d\mathbf{q}} + \frac{du_q}{dr} - \frac{u_q}{r} \right]_{q=0}^{sector II}$$

$$\frac{du_q}{dr} = 0; \frac{du_r}{d\mathbf{q}} = u_o f''(\mathbf{q} = 0)$$

$$\Rightarrow \mathbf{t} = \frac{u_o \mathbf{m}}{r} [f''(\mathbf{q} = 0) + f(\mathbf{q} = 0)] = \frac{u_o \mathbf{m}}{r} C_2^{II}$$



En ambientes tipo Chileno la compresión tectónica es del orden de 30 Mpa, en consecuencia una tracción en la base del orden de 1 Mpa no puede desarrollar cuencas de trasarco, a menos que la viscosidad fuese del orden de 10^{20} Pas o superior. En contraste la compresión en ambientes tipo Marianas es muy débil y por tanto una tracción del orden de 1 Mpa puede desarrollar extensión en el tras-arco.

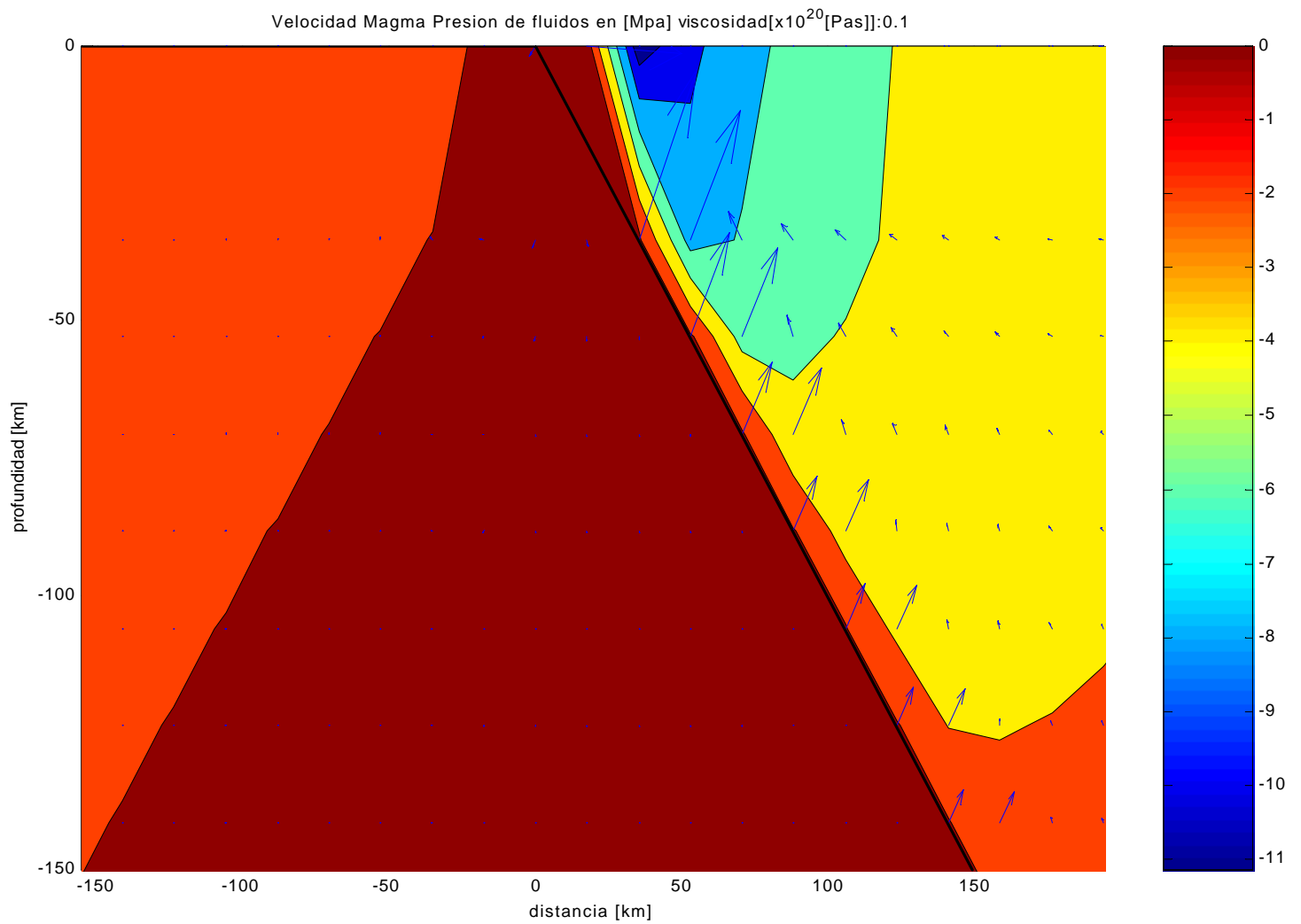
Presión de fluidos y la migración magmática en dirección de la cuña astenosférica:

La presión negativa en la cuña continental tiene una fuerte dependencia con la distancia a la fosa. Esta presión negativa es la que permite la concentración magmática en el vértice de la cuña astenosférica (normalmente a unos 200 km de la fosa y a unos 100 km de profundidad).

El flujo en la dirección del vértice de la cuña astenosférica esta descrito por la cinemática de fluidos en medios porosos (Ley de Darcy) que indica que el flujo es proporcional al gradiente de presión e inversamente proporcional a la viscosidad, la constante de proporción es la permeabilidad del medio:

$$u_{\text{magma}} = -\frac{k}{m} \nabla P$$

En la figura siguiente se aprecia como el gradiente de presión tiende a concentrarse en el vértice de la cuña astenosférica:



Convección en el manto: un problema de convección termal

El problema de convección en el manto es central para el entendimiento de la tectónica global ya que es este el mecanismo que explica la cinemática de placas.

Para aproximarnos al problema re escribimos la ecuación del movimiento en sentido x (horizontal) e y (vertical). La fuerza de cuerpo considerada es una pequeña perturbación a la densidad de referencia:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{r}';$$

$$\text{donde } \mathbf{r}' \ll \mathbf{r}_o$$

este supuesto corresponde a la aproximación de Boussinesq que indica que los cambios en densidad solo afectan a las fuerzas de cuerpo y no a la ecuación de continuidad.

Insertando esta aproximación en la ecuación de fuerza:

$$x : -\frac{dP}{dx} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right] = 0$$

$$y : -\frac{dP}{dy} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} \right] + (\mathbf{r}_o + \mathbf{r}')g = 0$$

Reduciendo la presión hidrostática ($P' = P - \rho gy$),

$$x : -\frac{dP'}{dx} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right] = 0$$

$$y : -\frac{dP'}{dy} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} \right] - \mathbf{r}' g = 0$$

La perturbación de la densidad en el problema de convección en el manto obedece a la presencia de una anomalía termal que perturba la densidad de referencia de acuerdo a la ecuación derivada del coeficiente de expansión térmica:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_o \exp^{-\mathbf{a}_v (T - T_o)} \approx -\mathbf{r}_o \mathbf{a}_v (T - T_o)$$

Generalmente el coeficiente de expansión térmica es del orden de $10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{K}^{-1}$, y los contrastes en temperatura son no superiores a $10^2 \text{ }^{\circ}\text{K}$, por tanto la exponente es análoga a su argumento. De tal forma que la componente vertical de la ecuación de movimiento puede escribirse como:

$$y : -\frac{dP'}{dy} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} \right] + \mathbf{r}_o g \mathbf{a}_v (T - T_o) = 0$$

La fuerza de cuerpo es dependiente del perfil de temperatura en la columna de manto involucrada en la convección. En consecuencia para resolver la ecuación de movimiento se debe resolver en forma simultánea la ecuación de energía térmica con término advectivo (descrita en capítulo 2:

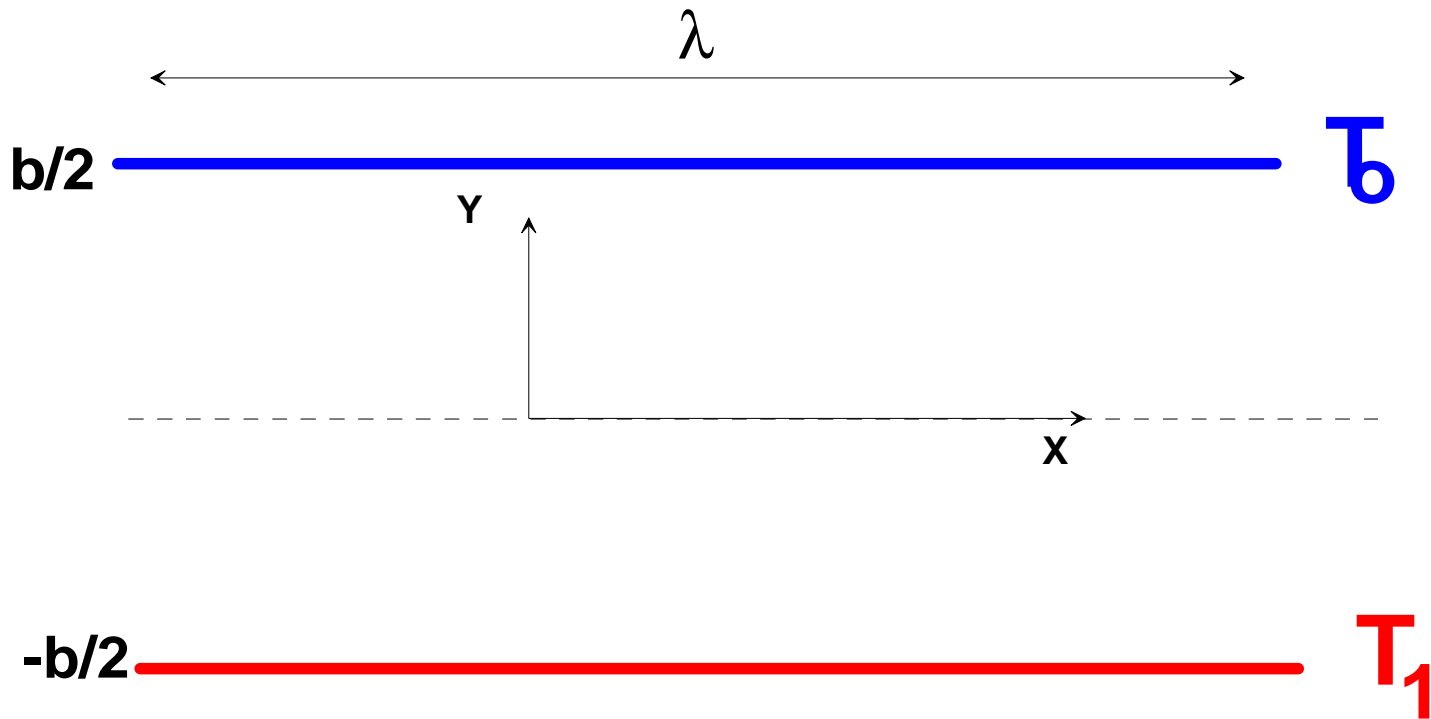
$$\frac{dT}{dt} + u \frac{dT}{dx} + v \frac{dT}{dy} = \mathbf{k} \left[\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} \right]$$

y las ecuaciones de movimiento ya descritas:

$$x : -\frac{dP}{dx} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right] = 0$$

$$y : -\frac{dP'}{dy} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} \right] + \mathbf{r}_o g \mathbf{a}_v (T - T_o) = 0$$

Para aproximarnos a la solución de este grupo de ecuaciones acopladas estudiaremos las condiciones para el inicio de una convección calentada desde abajo asumiendo una temperatura T_1 , levemente superior a la temperatura necesaria para iniciar la convección.



Las condiciones de conducción térmica previo al inicio de la convección es:

$$T_c(y) = \frac{T_1 + T_0}{2} + \frac{(T_0 - T_1)}{b} y$$

Si la diferencia de temperatura aumenta infinitesimalmente para gatillar la convección:

$$T' = T - T_c = T - \left[\frac{T_1 + T_0}{2} + \frac{(T_0 - T_1)}{b} y \right]$$

Bajo estas condiciones el campo de temperaturas resultante $T = T_c + T'$ presenta las siguientes variaciones espaciales:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT'}{dx}; \frac{dT}{dy} = \underbrace{\frac{dT_c}{dy}}_{\left(\frac{T_0 - T_1}{b}\right)} + \frac{dT'}{dy}; \frac{d^2T}{dy^2} = \frac{d^2T'}{dy^2}$$

El término advectivo en la ecuación de energía son pequeños al momento de iniciarse la subducción, adicionalmente los gradientes de temperatura horizontales son igualmente marginales en consecuencia el único término advectivo que contribuye esta relacionado con el gradiente vertical $\Delta T/b$, de tal forma que la ecuación de energía se reduce a:

$$\frac{dT'}{dt} - v \frac{(T_1 - T_0)}{b} = \mathbf{k} \left[\frac{d^2T'}{dx^2} + \frac{d^2T'}{dy^2} \right]$$

Finalmente el conjunto de ecuaciones de perturbación comprenden a:

$$x : -\frac{dP}{dx} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right] = 0$$

$$y : -\frac{dP'}{dy} + \mathbf{m} \left[\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} \right] + \mathbf{r}_o g \mathbf{a}_v \underbrace{T'}_{(T-T_o)} = 0$$

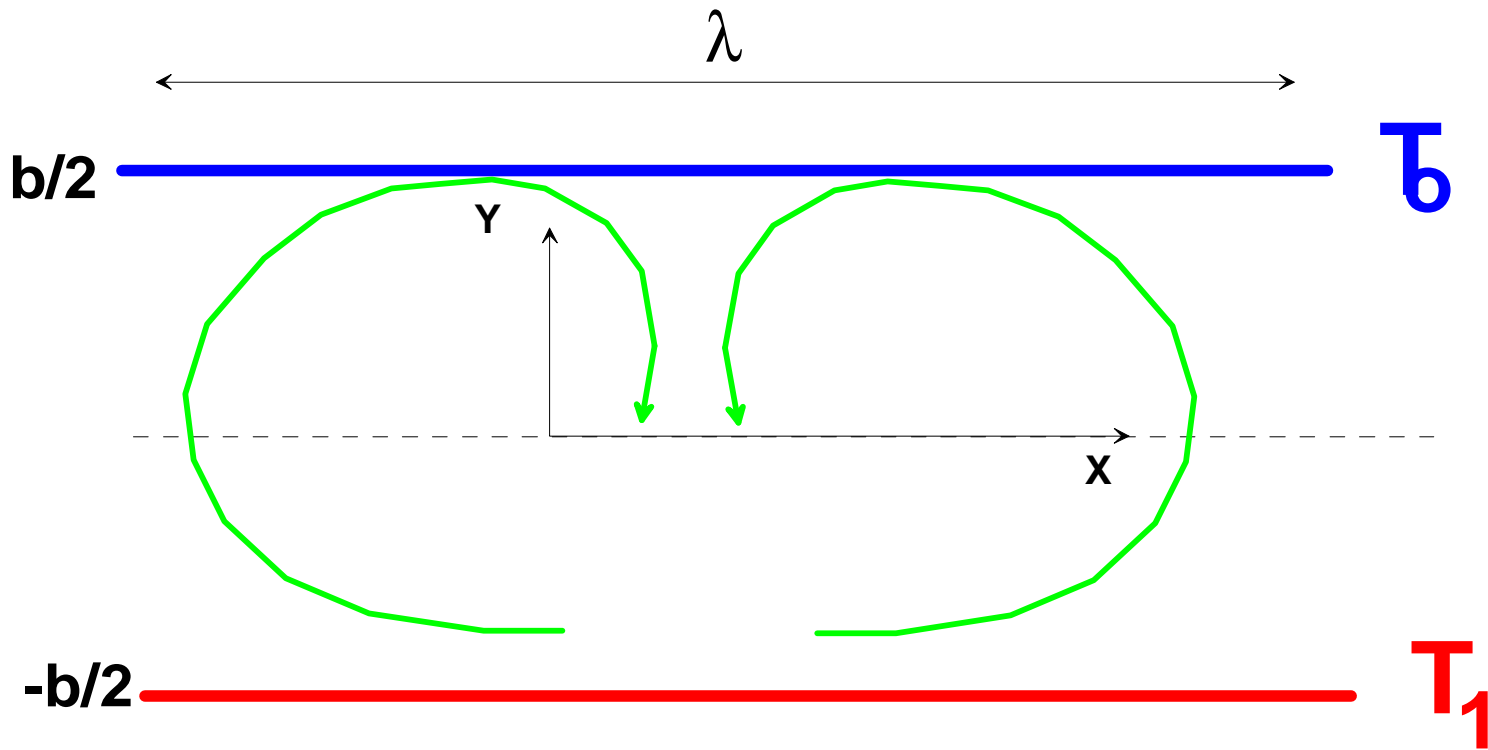
$$\frac{dT'}{dt} - v \frac{(T_1 - T_0)}{b} = \mathbf{k} \left[\frac{d^2 T'}{dx^2} + \frac{d^2 T'}{dy^2} \right]$$

Para la solución de este sistema de ecuaciones utilizamos nuevamente la función corriente en coordenadas cartesianas, de tal forma que el sistema de ecuaciones se reduce a 2 ecuaciones:

$$u = -\frac{d\mathbf{f}}{dy}; v = \frac{d\mathbf{f}}{dx} \Rightarrow$$

$$\mathbf{m} \left[\frac{d^4 \mathbf{f}}{dx^2 dy^2} + 2 \frac{d^4 \mathbf{f}}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 \mathbf{f}}{dy^4} \right] + \mathbf{r}_0 g \mathbf{a}_v = 0$$

$$\frac{dT'}{dt} - \frac{(T_1 - T_0)}{b} \frac{d\mathbf{f}}{dx} = \mathbf{k} \left[\frac{d^2 T'}{dx^2} + \frac{d^2 T'}{dy^2} \right]$$



Las condiciones de borde son:

$T' = 0$; $v = 0$ para $y = \pm b/2$ (la perturbación de temperatura y la velocidad vertical es nula en las fronteras termalales).

Adicionalmente el esfuerzo de cizalle debe ser nulo en ambas superficies (el flujo es controlado por la diferencia de temperatura y no por cizalle en la base de la litósfera y el manto inferior; de hecho anteriormente habíamos determinado que la litósfera actúa pasivamente a la convección en el manto).

Como la velocidad vertical es nula en ambas fronteras termales, el gradiente horizontal de esta velocidad es nula y la condición de cizalle nulo se reduce simplemente a:

$$\frac{du}{dy} = 0; y = \pm b / 2$$

La solución simultánea de la ecuación bi-harmónica y la ecuación de energía para una perturbación sinusoidal de longitud de onda λ , corresponde a:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 \cos\left(\frac{\mathbf{p}y}{b}\right) \sin\left(\frac{2\mathbf{p}x}{l}\right) \exp^{a't}$$

$$T' = T_0' \cos\left(\frac{\mathbf{p}y}{b}\right) \cos\left(\frac{2\mathbf{p}x}{l}\right) \exp^{a't}$$

El valor de \mathbf{a}' condiciona el desarrollo de un proceso de convección, si es mayor que cero la perturbación crecerá en el tiempo, si el valor es negativo la perturbación decaerá en el tiempo y no habrá desarrollo de una convección termal.

Para determinar las constantes que definen el patrón de flujo es necesario aplicar las condiciones de borde. Sin embargo para determinar el rango de variabilidad de la constante \mathbf{a}' es necesario evaluar las soluciones genéricas en las ecuaciones de energía y movimiento, en consecuencia se derivan los términos correspondientes a cada derivada parcial en las ecuaciones de energía y movimiento:

Ecuación de energía:

$$T_0' \left\{ \mathbf{a}' + \mathbf{k} \left(\left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{b}} \right)^2 \right) \right\} = \frac{1}{b} (T_1 - T_0) \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} \mathbf{f}$$

Ecuación de movimiento:

$$\mathbf{m} \left\{ \left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} \right)^4 + \left(\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{b}} \right)^4 + 2 \left(\frac{2\mathbf{p}^2}{\mathbf{l}\mathbf{b}} \right)^2 \right\} \mathbf{f} = \mathbf{r}_0 g \mathbf{a}_v \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} T_0'$$

Para eliminar de este par de ecuaciones las funciones corriente y de temperatura se determina la razón entre ambas y luego se igualan ambas ecuaciones a fin de despejar la constante \mathbf{a}' :

$$\underbrace{\frac{\frac{1}{b}(T_1 - T_0)\frac{2p}{l}}{\left\{ \mathbf{a}' + \mathbf{k} \left(\left(\frac{2p}{l} \right)^2 + \left(\frac{p}{b} \right)^2 \right) \right\}}}_{\frac{T_0'}{f}, \text{energía}} = \underbrace{\frac{\mathbf{m} \left\{ \left(\frac{2p}{l} \right)^4 + \left(\frac{p}{b} \right)^4 + 2 \left(\frac{2p^2}{lb} \right)^2 \right\}}{\mathbf{r}_0 g \mathbf{a}_v \frac{2p}{l}}}_{\frac{T_0'}{f}, \text{movimiento}}$$

Esta última relación permite despejar el factor \mathbf{a}' que controla la iniciación de una perturbación en la convección. Efectuando un poco de álgebra se obtiene:

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{k}}{b^2} \left[Ra \frac{r_1^2}{r_2^2} - r_2 \right]$$

Donde:

$$Ra = \frac{\mathbf{r}_0 g \mathbf{a}_v (T_1 - T_0) b^3}{\mathbf{mk}} \equiv \text{Numero de Rayleigh}$$

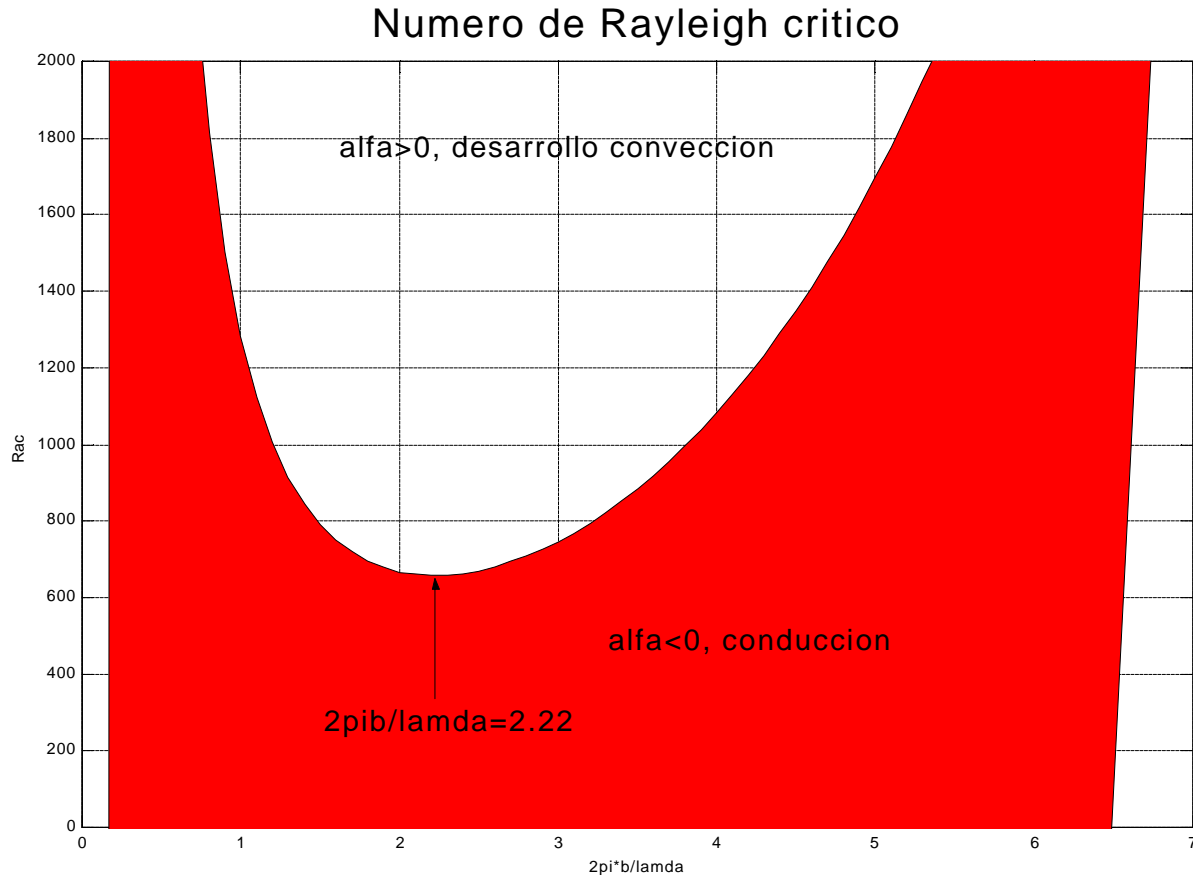
$$r_1 = \frac{2pb}{I}; r_2 = \left(\frac{2pb}{I} \right)^2 + p^2$$

Entonces el desarrollo de la convección dependerá de la relación existente entre el número de Rayleigh y los factores geométricos r_1 y r_2 . Para

$$Ra \frac{r_1^2}{r_2^2} - r_2 > 0 \Rightarrow \text{inicio convección,}$$

$$Ra \geq \frac{r_2^3}{r_1^2}$$

La condición crítica se produce cuando se cumple la igualdad en la relación anterior. Dibujando esta dependencia en función de la razón entre la razón de las dimensiones de la celda convectiva se obtiene el dominio en el cual crece en forma estable una perturbación:



La condición mas favorable para el inicio de la convección esta dada para un Rayleigh crítico de 657, para una longitud de onda crítica que es 2.8 veces la altura de la celda convectiva.

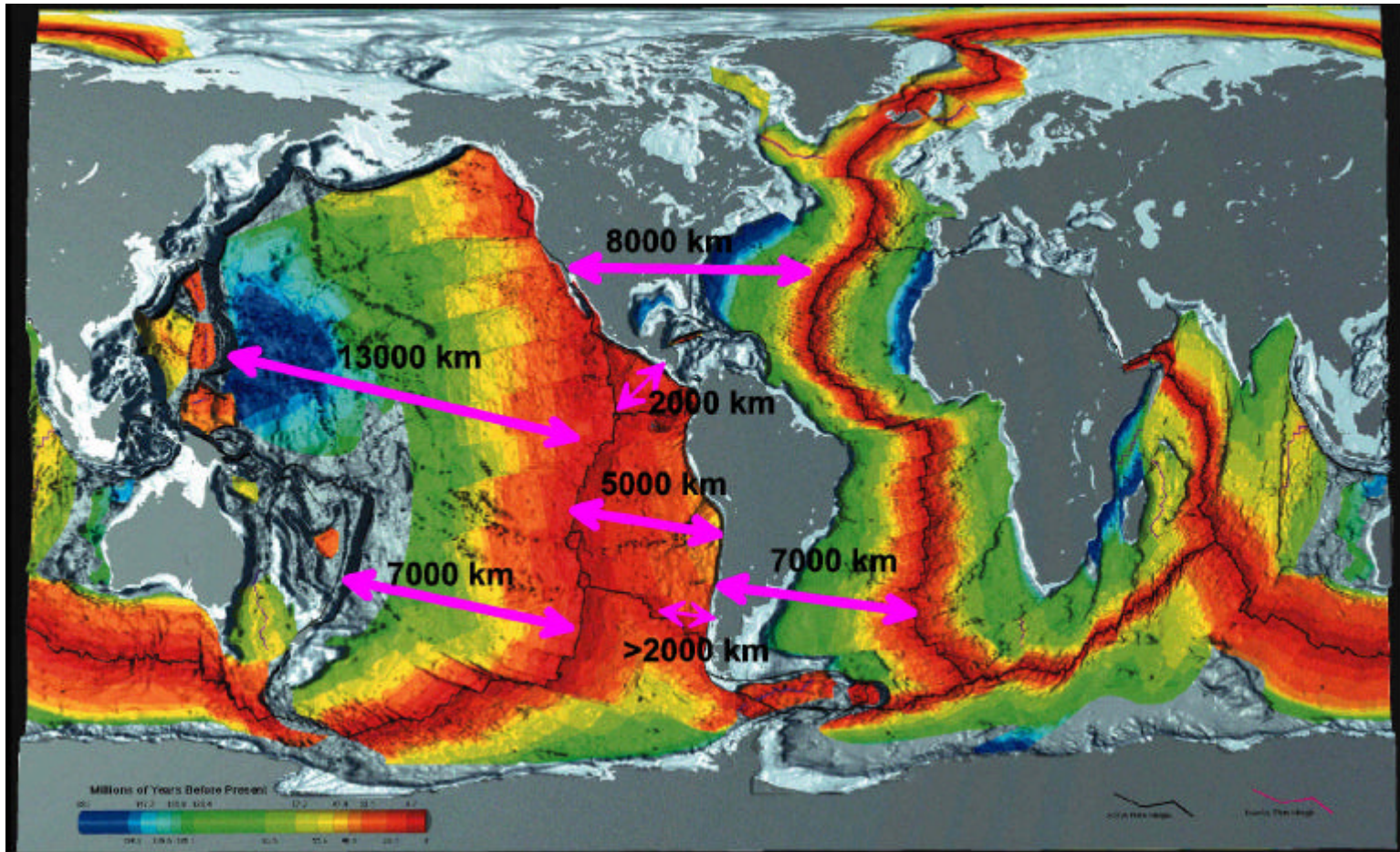
Considerando números razonables para la acción de la convección en el manto:

viscosidad [Pas]	Densidad [kg/m ³]	Difusión térmica [m ² /s]	Gravedad [m/s ²]	Alto celda convectiva [km]	Coeficiente de expansión Térmica °K ⁻¹	Gradiente térmico [°K]	Rayleigh
10 ²¹	4000	10 ⁻⁶	10	700 3000	3·10 ⁻⁵	300	10 ⁵ 10 ⁸

Estos números de Rayleigh (que difieren en el alto de la celda convectiva, para una circulación restringida al manto superior b=700km, o todo el manto b=3000km) superan largamente la condición crítica, por tal motivo ya en 1931 Arthur Holmes postuló por primera vez que la convección termal era responsable de la deriva continental.

Si las condiciones en las cuales ocurre la convección son diferentes, por ejemplo si el calentamiento proviene del interior de la celda convectiva, entonces el $Ra_c = 867$, y la razón largo/alto = 3.5

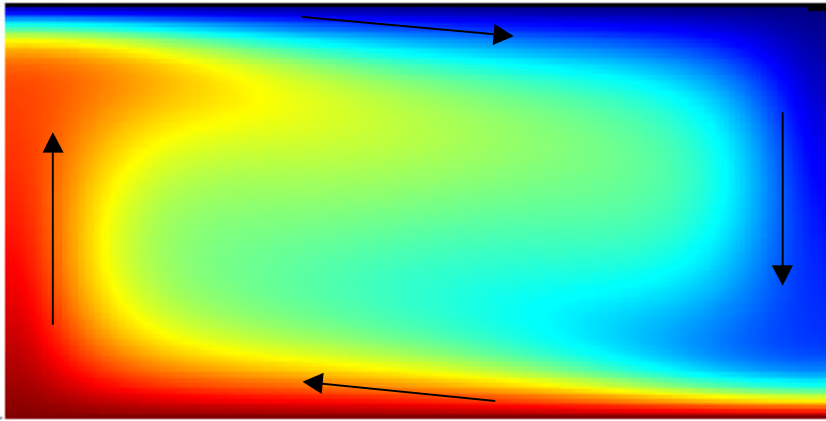
En cualquiera de estas dos condiciones es interesante recalcar que el largo de la celda convectiva es del orden de 3 veces el alto. Si el manto completo (3000 km de espesor) esta en convección, tendríamos una celda convectiva de un largo del orden de 10000 km, Sin embargo los sistemas que constituyen las manifestaciones externas de la convección (dorsales-subducción) tienen una separación media del orden de 3000-4000, lo cual indicaría una celda convectiva de un alto no superior a 1000 km (es decir manto superior). Esta inferencia es consistente con evidencias geoquímicas que indicarían un grado de diferenciación del manto (a partir de una composición chodritica hace 4.6 Gyr) consistente con una circulación en el manto superior. Sin embargo esta posición es controversial ante evidencias sismológicas de secciones de placa subductada que incursionan en el manto inferior. Ambas posiciones parecerían reconciliarse con celdas convectivas de distinto tamaño en distintos sectores y periodos de la evolución geológica de la tierra.



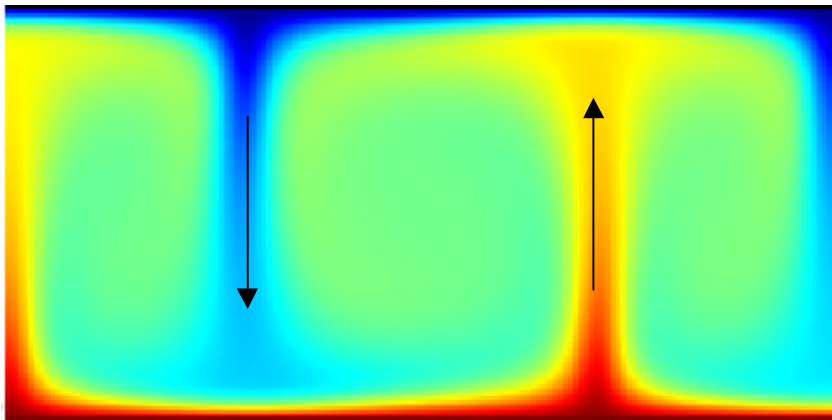
La asociación de las celdas convectivas con el par dorsal-subducción es una simplificación extrema ya que en la práctica vemos dorsales sin subducción

(Placa Sudamericana, Norteamericana), placas con diferencias muy grandes entre la distancia dorsal-fosa (placa pacífica) y distancias dorsal-fosa inferiores a 2000 km (Cocos, dorsal de Chile-Fosa Chile-Peru). En consecuencia la relación causa-efecto entre la tectónica de placas y la convección no es tan simple como podría sugerirlo un comportamiento pasivo de las placas ante el mecanismo de convección. Conceptos como el “ridge-push” y “slab-pull” tendrían mucha mas importancia en la dinámica de placas (si bien ambos mecanismos forman parte integral del proceso convectivo de la tierra).

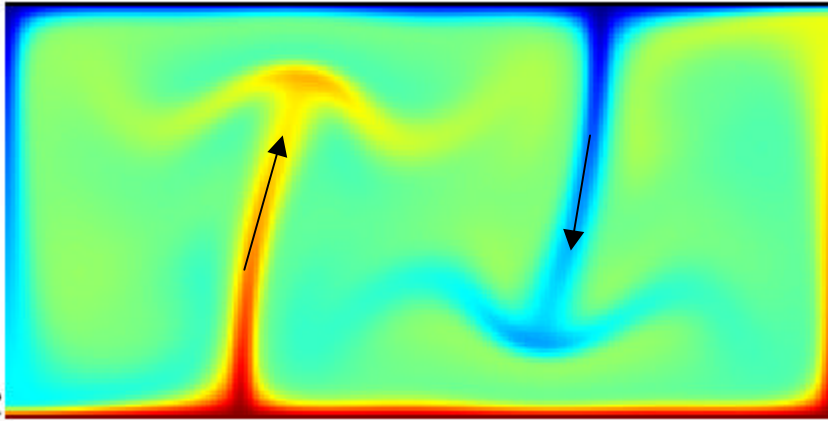
Por otra parte, la estabilidad de la solución numérica de las ecuaciones integradas de energía y movimiento dependen fuertemente del número de Rayleigh y en consecuencia del gradiente termal entre las fronteras termal del manto y la litosfera. En las figuras siguientes se aprecian las diferencias del fenómeno convectivo para un número de Rayleigh entre 10^4 y 10^7 .



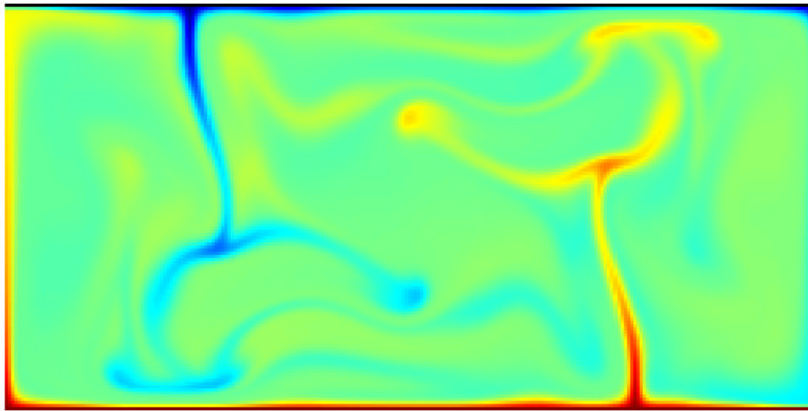
Para un $Ra = 10^4$ la convección alcanza un estado de equilibrio con una gruesa pluma ascendente que es simétrica a la pluma descendente manteniendo una razón 2:1 entre ancho y alto.



Para un $Ra = 10^5$ la convección alcanza un estado de equilibrio levemente dependiente del tiempo, con una pluma ascendente mas fina que en el caso anterior y simétrica a la pluma descendente, una razón 1:1 entre ancho y alto.



Para un $Ra = 10^6$ la convección es muy vigorosa y con una fuerte dependencia temporal y levemente caótica y una razón inferior 1:1 entre ancho y alto.



Para un $Ra = 10^7$ la convección es aun mas vigorosa y altamente caótica y con celdas convectivas definitivamente mas altas que anchas. Es interesante destacar que números de Rayleigh de estas magnitudes se infieren para la evolución geológica de la tierra en el

arqueano, con gradientes termale mucho mas grandes y placas litosféricas de pequeñas dimensiones (solo el en el precámbrico se conforman las placas litosféricas que conocemos hoy en día).

Deformación Continental a gran escala: Aproximación a lámina viscosa delgada (“Thin viscous sheet approximation”). (Introducción)

La aproximación a una lámina delgada se basa en la observación que la deformación litosférica ocurre en dimensiones horizontales de un orden de magnitud superior ($\sim 1,000$ km) a las verticales (~ 100 km).

En consecuencia se puede asumir que los gradientes horizontales de velocidad son los que condicionan la deformación, entonces:

$$\frac{du}{dz} \approx \frac{dv}{dz} = 0$$

Si bien la corteza frágil es capaz de soportar un gran esfuerzo deviatorico, las evidencias sísmicas indican que la deformación continental compromete una condición pasiva de la corteza frágil ante la deformación de la litósfera como

un todo. Un análisis de medios continuos no puede explicar la existencia de fallas, sin embargo la presencia de zonas con altas tasas de deformación permiten inferir la ocurrencia de zonas de falla en la corteza superior, como manifestación externa de ambientes de altas tasas de deformación.

- Formulación Teórica:

A diferencia de la aproximación de “plain strain” en donde se asume que la velocidad vertical es nula (todo ocurre en el plano horizontal), en este caso se relaja esta condición pero se asume que el esfuerzo vertical es nulo. El problema se reduce al plano horizontal integrando la ecuación de fuerza en sentido vertical.

La ecuación de balance de fuerzas para el caso 2-D se extiende entonces para un problema en el espacio 3-D de la siguiente forma:

$$x : -\frac{dP}{dx} + \frac{d\mathbf{t}_{xx}}{dx} + \frac{d\mathbf{t}_{xy}}{dy} + \frac{d\mathbf{t}_{xz}}{dz} = 0$$

$$y : -\frac{dP}{dy} + \frac{d\mathbf{t}_{xy}}{dx} + \frac{d\mathbf{t}_{yy}}{dy} + \frac{d\mathbf{t}_{yz}}{dz} = 0$$

$$z : -\frac{dP}{dz} + \frac{d\mathbf{t}_{xz}}{dx} + \frac{d\mathbf{t}_{yz}}{dy} + \frac{d\mathbf{t}_{zz}}{dz} = -\mathbf{r}g$$

La aproximación a una lámina delgada reduce la dimensión vertical del problema haciendo una integración de la columna litosférica, determinando

una expresión para la presión asociada a las fuerzas gravitacionales que si intervienen en la componente vertical del equilibrio de fuerzas. Para integrar en la vertical la ecuación en z se considera que la variación horizontal de los esfuerzos de cizalle verticales son nulos:

$$\frac{dt_{xz}}{dx} \approx \frac{dt_{yz}}{dy} \approx 0$$

Esto es consecuencia directa de la aproximación que indica que los gradientes de velocidad se restringen al plano horizontal en las componentes horizontales de velocidad. Adicionalmente esta implícito que los gradientes horizontales de la velocidad vertical son despreciables (las longitudes de onda de la deformación en el plano horizontal son muy superiores a la escala vertical de esta deformación). Mediante esta aproximación la ecuación en la dirección z se reduce a:

$$-\frac{dP}{dz} + \frac{dt_{zz}}{dz} = -\mathbf{r}g$$

Integrando c/r a z:

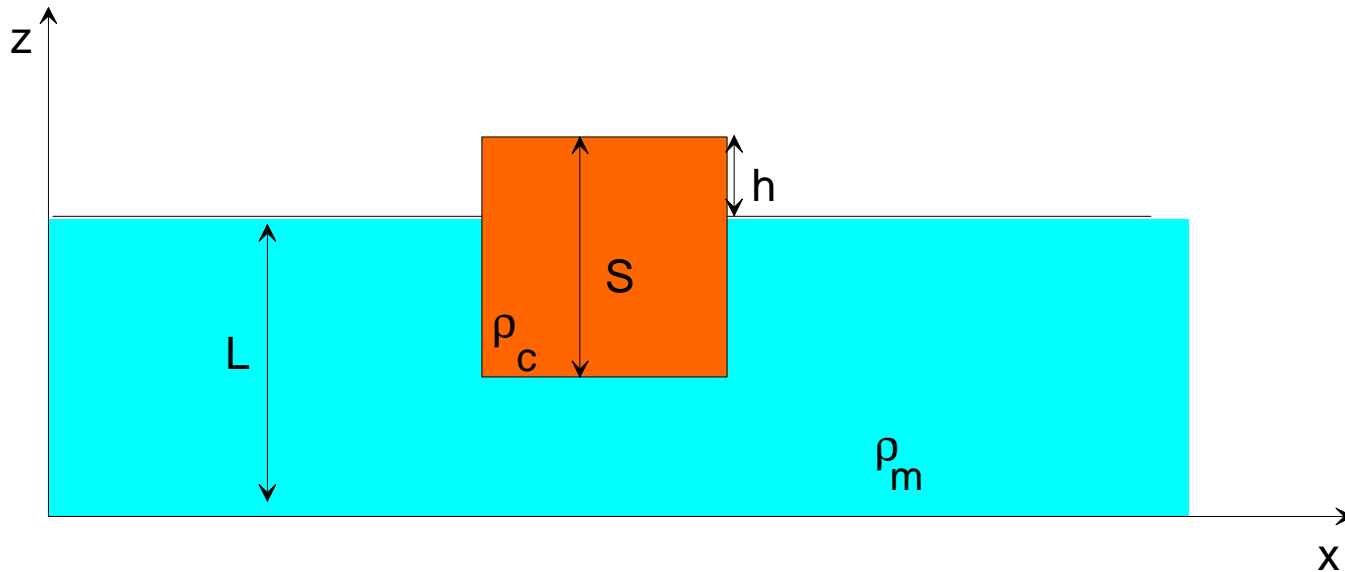
$$P(z) = \left[t_{zz} - P \right]_{z=0} - \int_0^z \mathbf{r}g dz'$$

El término constante de integración:

$$\left[t_{zz} - P \right]_{z=0} = -P_o = -\mathbf{r}_m Lg$$

Corresponde a la presión en el nivel de compensación isostática en la base de la litósfera de espesor L.

Esta presión en función de la vertical puede ahora ser integrada para así obtener una presión media en la columna litosférica, de acuerdo a la siguiente geometría:



$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{L} \int_0^L P(z) dz \\ &= -\mathbf{r}_m g L - \frac{1}{L+h} \int_0^L dz \int_0^z \mathbf{r} g dz'\end{aligned}$$

Para la integración de la columna litostática se considera un equilibrio isostático de la corteza continental:

$$h = S \left(1 - \frac{\mathbf{r}_c}{\mathbf{r}_m} \right)$$

De tal forma que la función de densidad en la columna litosférica tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}(z) = \begin{matrix} \mathbf{r}_m; 0 > Z < L - S \frac{\mathbf{r}_c}{\mathbf{r}_m} \\ \mathbf{r}_c; L - S \frac{\mathbf{r}_c}{\mathbf{r}_m} \geq Z \leq L + S(1 - \frac{\mathbf{r}_c}{\mathbf{r}_m}) \end{matrix}$$

Considerando esta dependencia de la densidad, la presión media en la litósfera producto de las fuerzas de cuerpo asociadas al espesor cortical corresponde a:

$$\bar{P}(x, y) = \frac{\mathbf{r}_m g L}{2} + \frac{g \mathbf{r}_c S^2}{2L} \left(1 - \frac{\mathbf{r}_c}{\mathbf{r}_m} \right)$$

Con esta expresión de la presión media asociada al relieve la ecuación de movimiento se reduce al plano horizontal, pero teniendo en consideración el efecto forzante de las fuerzas gravitacionales. En estas ecuaciones sin embargo lo que influye es el gradiente de presión:

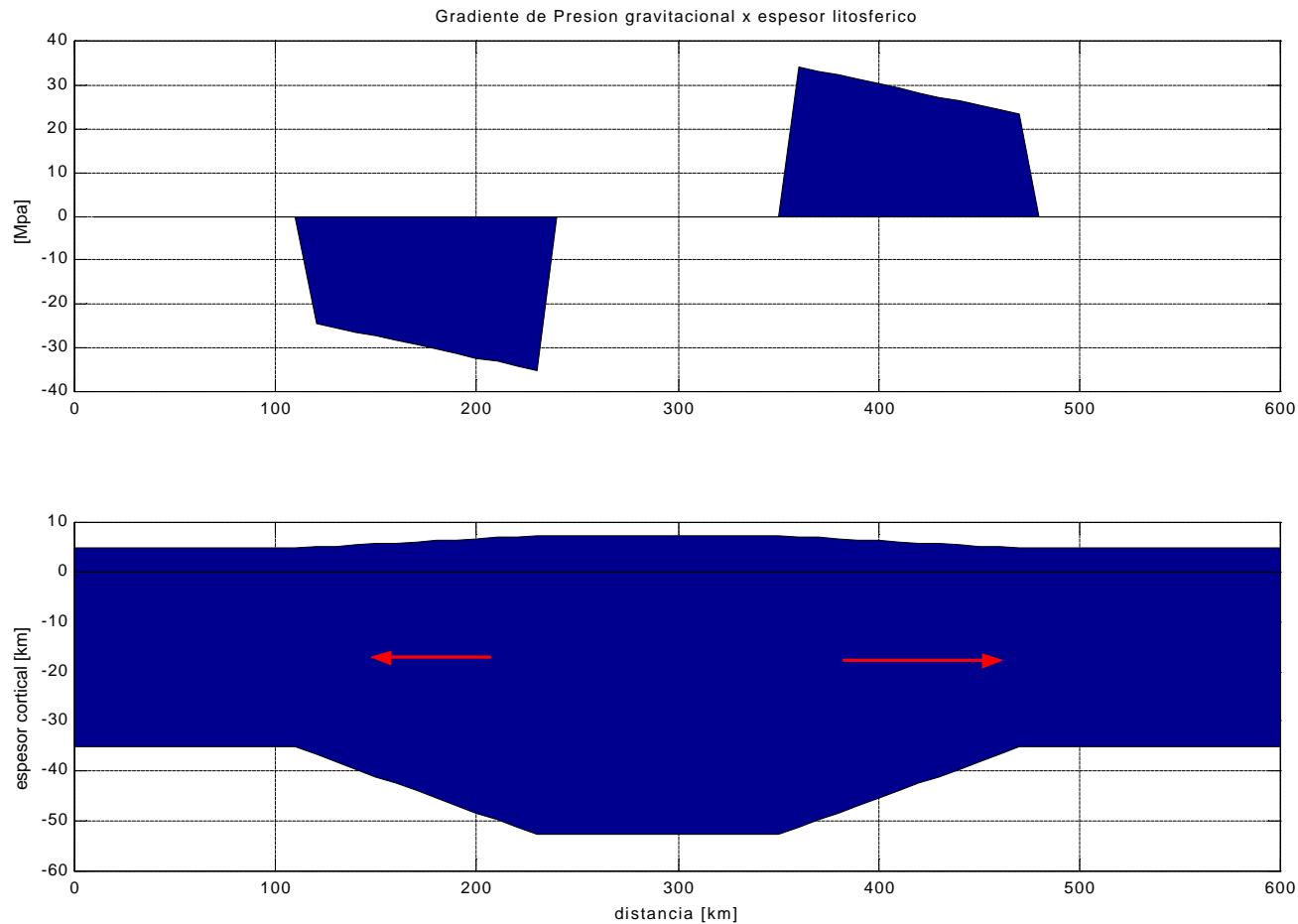
$$\nabla \bar{P}(x, y) = \frac{g \mathbf{r}_c S}{L} \left(1 - \frac{\mathbf{r}_c}{\mathbf{r}_m} \right) \nabla S$$

$$x: \frac{d\mathbf{t}_{xx}}{dx} + \frac{d\mathbf{t}_{xy}}{dy} = \frac{g\mathbf{r}_c S}{L} \left(1 - \frac{\mathbf{r}_c}{\mathbf{r}_m} \right) \frac{dS}{dx}$$

$$y: \frac{d\mathbf{t}_{yy}}{dy} + \frac{d\mathbf{t}_{yx}}{dx} = \frac{g\mathbf{r}_c S}{L} \left(1 - \frac{\mathbf{r}_c}{\mathbf{r}_m} \right) \frac{dS}{dy}$$

Es interesante destacar que la fuerza gravitacional expresada en el gradiente de presión no es nula solo en el caso de un espesor cortical variable. En el medio de un plateau como el Altiplano Andino esta fuerza gravitacional es nula. Solo se expresa en los bordes en donde el gradiente es fuerte. Esta observación es consistente con el registro sísmico que indica una

concentración de la sismicidad en los bordes del altiplano pero no así en la parte central de este.



Si no existiese una fuerza tectónica que equilibrase el exceso de corteza, se produciría un colapso gravitacional hasta alcanzar una columna cortical de espesor constante. Nótese que para el plateau tipo altiplano las fuerzas extensionales asociadas son nulas. Los valores de esfuerzo del orden de 30 Mpa son realistas y constituyen los esfuerzos que por otras líneas de razonamiento (p. Ej. Caída de tensión en terremotos de subducción) se han asociado a los esfuerzos tectónicos globales.

La ley constitutiva que liga los esfuerzos y las deformaciones considera una reología no lineal del tipo (notación tensorial):

$$\mathbf{t}_{ij} = \underbrace{B \dot{E}^{(1/n-1)}}_{m_{eff}} \mathbf{e}_{ij}$$

Donde B es una constante de integración sobre la columna litosférica, que depende fuertemente del gradiente geotérmico en esta.

\dot{E} es el invariante de segundo orden del tensor de la tasa de deformación:

$$\dot{E} = \sqrt{\mathbf{\dot{e}}_{ij} \mathbf{\dot{e}}_{ij}} = \sqrt{\left[\frac{du}{dx}\right]^2 + \left[\frac{dv}{dy}\right]^2 + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + 2 \frac{du}{dy} \frac{dv}{dx} \right]}$$

Esta reología (o ley de flujo) no lineal nos indica que la viscosidad efectiva depende de hecho en la tasa de deformación . Si $n=1$ entonces la viscosidad efectiva es directamente la viscosidad newotniana (B).

Dada esta ley constitutiva podemos reemplazar en la ecuación de fuerza con:

$$\mathbf{t}_{xx} = \mathbf{m}_{eff} \frac{du}{dx}; \mathbf{t}_{yy} = \mathbf{m}_{eff} \frac{dv}{dy}; \mathbf{t}_{xy} = \frac{\mathbf{m}_{eff}}{2} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right)$$

Entonces:

$$x: \frac{d}{dx} \left(2\mathbf{m}_{eff} \frac{du}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\mathbf{m}_{eff} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \right) = 2A_r S \frac{dS}{dx}$$

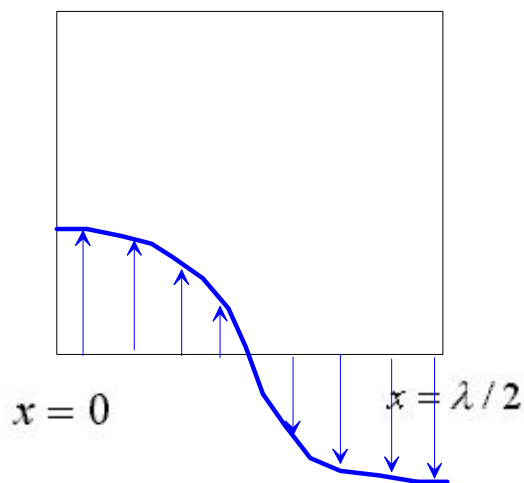
$$y: \frac{d}{dy} \left(2\mathbf{m}_{eff} \frac{dv}{dy} \right) + \frac{d}{dx} \left(\mathbf{m}_{eff} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \right) = 2A_r S \frac{dS}{dy}$$

$$A_r = \frac{g\mathbf{r}_c S}{L} \left(1 - \frac{\mathbf{r}_c}{\mathbf{r}_m} \right) \equiv \text{numero de Argand}$$

El número de Argand parametriza la influencia de las fuerzas gravitacionales.

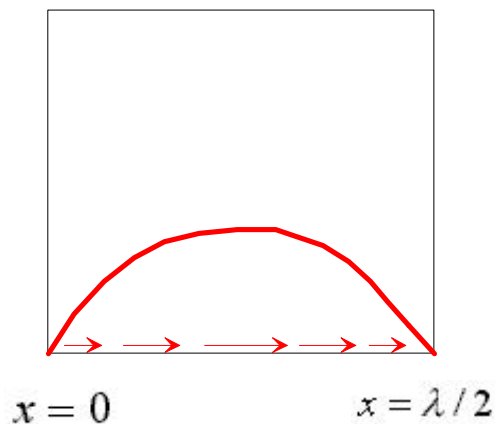
Para explicar los efectos de la deformación ante reologías lineales y no-lineales resolvemos casos simples para un número de Argand nulos y condiciones de borde sinusoidales que permiten definir soluciones analíticas simples. Dos tipos de soluciones son analizados en cada caso: a) condición de borde compresiva y b) condición de borde trasncurrente:

"indenter"



$$v = v_o \cos(2\pi x / \lambda)$$

transcurrente



$$u = u_o \sin(2\pi x / \lambda)$$

Para la condición de borde compresiva la solución aproximada de la componente vertical de la velocidad tiene la siguiente forma:

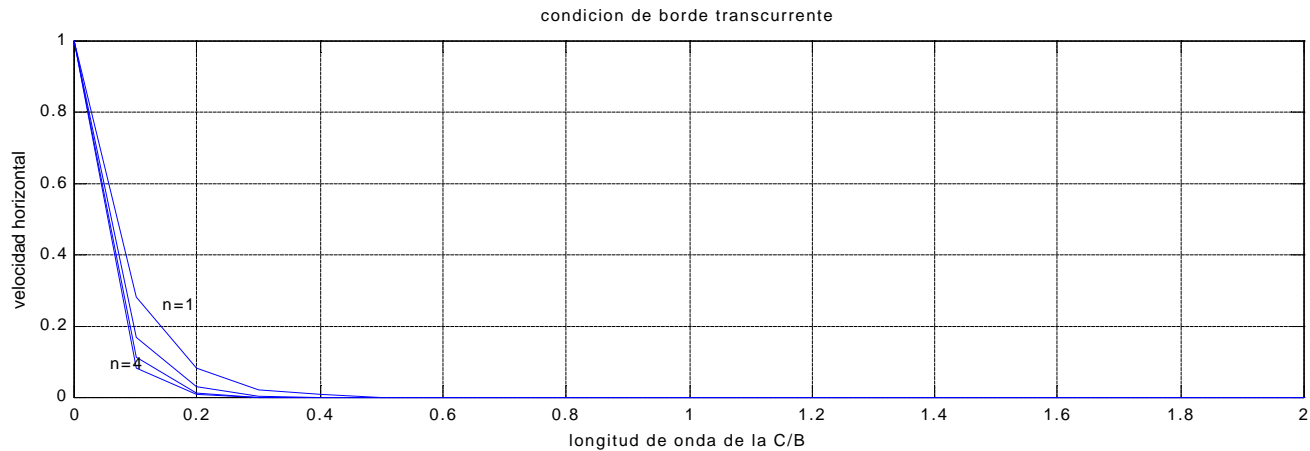
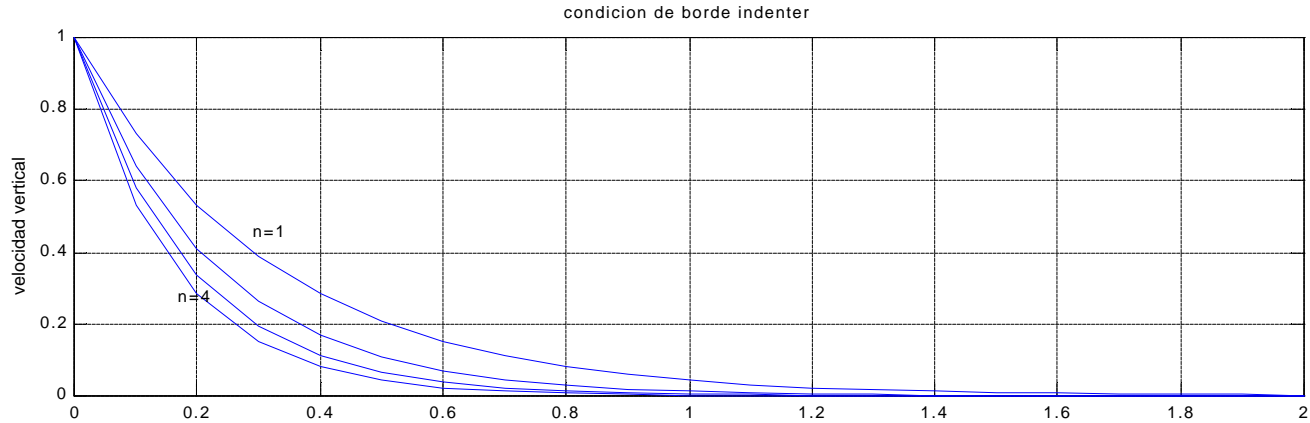
$$v(x, y)_{indent} \approx v_o \cos(2px / l) e^{-\sqrt{n}py / l}$$

Para la condición de borde trasncurrente la componente principal de la deformación es ahora la velocidad horizontal:

$$u(x, y)_{transc} \approx u_o \sin(2px / l) e^{-4\sqrt{n}py / l}$$

El decaimiento de la deformación depende de la longitud de onda de la condición de borde y el tipo de condición de borde. Las fallas trasncurrentes tiene un decaimiento exponencial que es 4 veces mas severo que en ambientes compresivos. Si la reología es no lineal el decaimiento es mas

pronunciado, como la raíz de la ley de potencia. Este comportamiento permite concentrar la deformación.

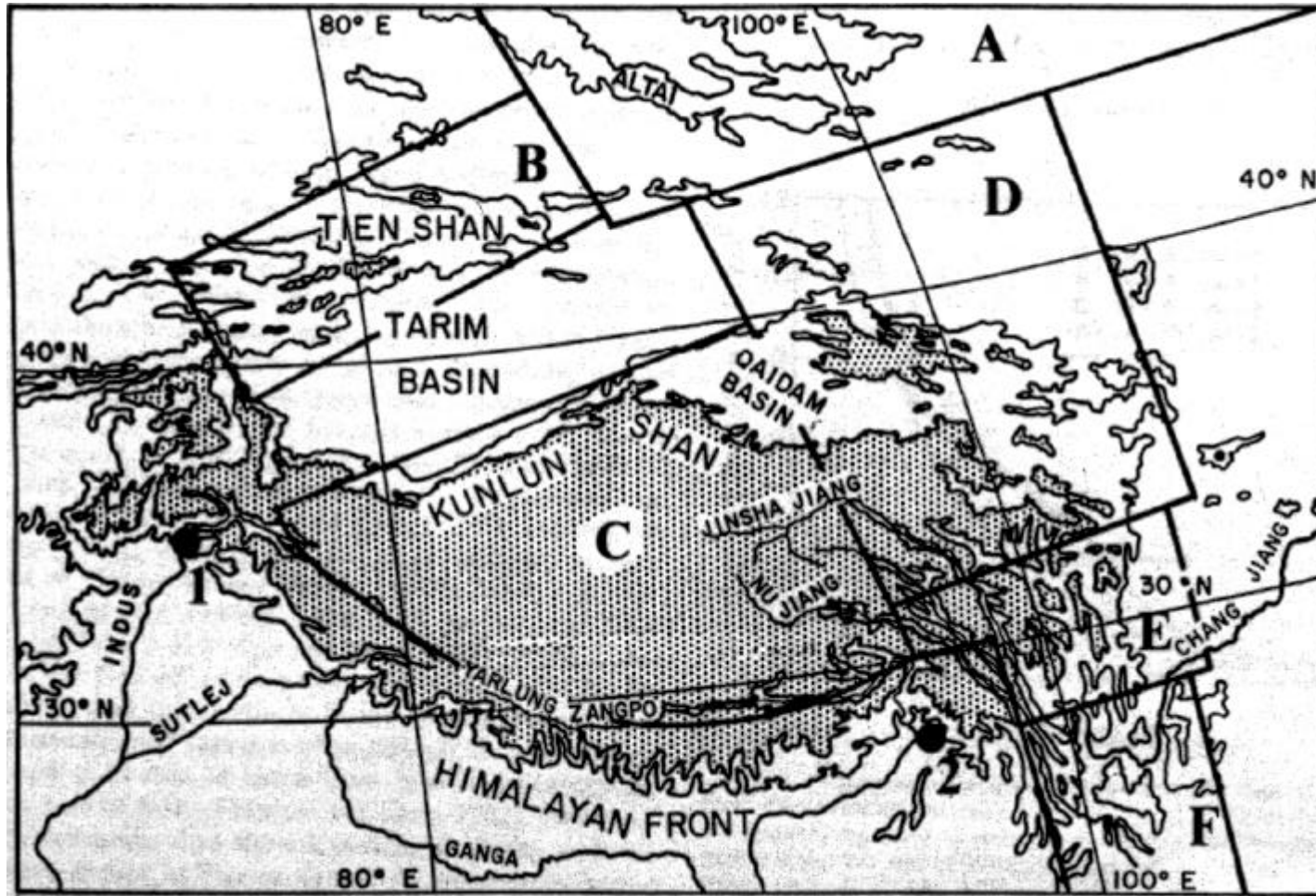


La condición de borde compresiva se extiende hasta una longitud de onda para una reología newtoniana, sin embargo para una reología no lineal igual a 3 o 4, para un 60% de la longitud de onda característica de la deformación su efecto es prácticamente nulo.

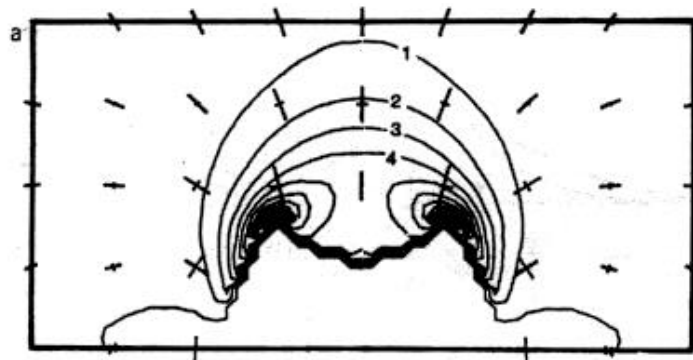
En el caso de una condición de borde transcurrente, su efecto es del orden de $1/3$ de la longitud de onda para $n=1$ y $1/4$ para una reología no lineal de $n=4$.

Si conocemos la longitud de la deformación (observación de campo) podemos inferir entonces la longitud de onda de la falla o a la inversa. Por ejemplo en las fallas transcurrentes del norte de Chile, Falla Atacama, Falla Oeste, la longitud de la falla es de mas del orden de 500-800 km. Si la falla tuviese una deformación como una sola unidad, se esperaría una deformación de 150 a 250 km, sin embargo las observaciones de campo indican anchos de deformación no superiores a 50km lo cual indica que estas megafallas se deforman en segmentos de algunas decenas de kilometros.

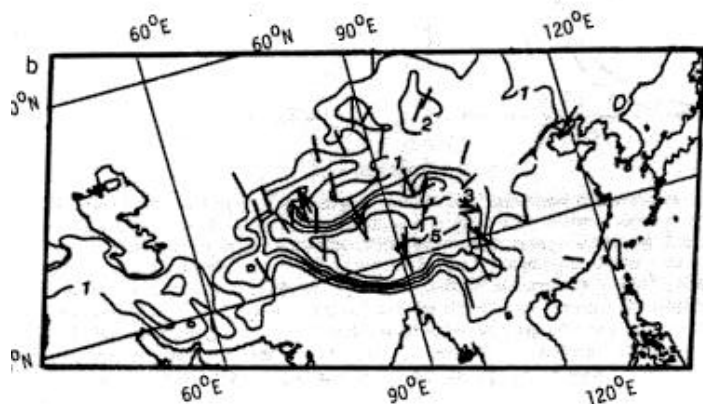
Deformación en los Himalayas mediante la aplicación de una lámina delgada.



a)



a) Resultado del modelo de deformación luego de 40 My de convergencia con $n=5$ y $Ar=2$ (contorno cada 1 km). Las barras indican el esfuerzo deviatorico.



b) Relieve del sector e inferencia del esfuerzo actual derivado de la sismicidad natural (eje P)

c) Similar a a) pero con $n=3$ y $Ar=1$, notese que al reducir la ley de potencia la deformación tiende a distribuirse en una mayor superficie.

El esfuerzo deviatorico hacia los flancos del frente de deformación condicionan la tectónica de escape observada en el sector.

