Coloquio Condesación de Bose-Einstein

Tarea 4

Profesor: Sergio Rica

Problema 16 Extensión del 13

Partiento de la ecuación cinetica del problema 13 en dimensión D y relación de dispersión $\omega_i = k_i^\alpha$.

i) Muestre, usando $\delta^{(D)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) = \frac{1}{(2\pi)^D} d^D\lambda e^{ik(k_1+k_2-k_3-k_4)}$, que para funciones distribución isótropas $w_i = w(k_i) = w(|k_i|)$ la ecuación cinética se puede escribir en general :

$$\partial_t w_1 = Coll_3[w_1] = \omega_1^{1-D/\alpha} \int_0^\infty d\omega_3 \int_0^\infty d\omega_4 T_{1,2;3,4}(w_3w_4w_1 + w_3w_4w_2 - w_1w_2w_3 - w_1w_2w_4)i,$$

donde $\omega_2 = \omega_3 + \omega_4 - \omega_1 \geq 0$ y $T_{1,2;3,4}$ depende explicitamente de los ω's y posée la propiedad

$$T_{\lambda\omega_1,\lambda\omega_2;\lambda\omega_3,\lambda\omega_4} = \lambda^{(3D-4\alpha)/\alpha} T_{\omega_1,\omega_2;\omega_3,\omega_4}$$

discuta las simetrías de $T_{1,2;3,4}$.

ii) Usando análisis dimensional encuentre las soluciones de tipo Kolmogorov de flujo de energía y de masa constante.

iii) Muestre siguiendo el artículo de Zakharov [V.E. Zakharov, Sov. Phys. JETP **24**, 455 (1967)] que estas soluciones anulan exactamente $Coll_3[w]$.

Problema 17

Para la ecuación cinética anterior, muestre: *i)* la distribución de equilibrio es la de Jeans

$$w_k^{eq} = \frac{T}{k^2 - \vec{v}\cdot\vec{k} - \mu}. \tag{1}$$

ii) Muestre que hay BEC si $D > \alpha$.

iii) Para el caso isótropo y suponiendo un *cut-off* ultravioleta k_c, calcule el número de partículas y energía por unidad de volumen en función de T y μ.

iv) Grafique $\frac{E}{Nk_c^\alpha}$ vs. $q = D/\alpha$ para diferentes valores de $-\mu/k_c^\alpha$. Cuánto vale $\frac{E}{Nk_c^\alpha}$ para $\mu = 0$?

v) Grafique μ/k_c^α vs $\frac{TV}{Nk_c^\alpha}$ para diferentes valores de $q = D/\alpha$.

Problema 18

Se ha sugerido en clases que si $D > \alpha$, entonces la ecuación cinética presenta una singularidad en tiempo finito. Sea

$$w(\omega, t) = \tau^{-\nu} \phi \left(\frac{\omega}{\tau} \right) \tag{2}$$

donde $\tau = \tau(t)$.

Encuentre la ecuación tipo Boltzmann satisfecha por ϕ y muestre que $\tau(t) \sim (t_* - t)^{\frac{1}{2\nu - 2D/\alpha + 1}}$.

Entrega Jueves 25 de noviembre 2004 antes de 11:45 hrs