Coloquio Condesación de Bose-Einstein

Tarea 2

Profesor: Sergio Rica

Problema 11

A partir de la función partición aproximada en clases para $Z_N(n_0, \mu)$, donde n_0 y μ son los del problema 9. Determine la dependencia de la presión como función de la densidad total $\rho = N/V$.

Dibujela para $\alpha = 0.1, 0.01, \& 0.001$.

Problema 12

La ecuación de Boltzmann-Nordheim para bosones (+) y fermiones (-) se escribe

$$\partial_t w(p_1, t) + \frac{p_1}{m} \cdot \nabla f - \nabla V \cdot \frac{\partial f}{\partial p_1} = \int d^3 p_2 d\sigma |p_1 - p_2| (w_3 w_4 (1 \pm w_1)(1 \pm w_2) - w_1 w_2 (1 \pm w_3)(1 \pm w_4)).$$

i) Muestre que la distribución $f(p) = \frac{1}{e^{\beta(p^2 - \mu)} \mp 1}$ anula el término de colisión.

ii) Muestre que el número de partículas por unidad de volumen, la densidad de momentum y la densidad de energía son conservadas.

iii) Muestre que se satisface el teorema-H para $H = \int d^3 p [(f_p \pm 1) \log(f_p \pm 1) - f_p \log f_p]$.

Para el caso de bosones:

iv) Encuentre los valores $(\beta \& \mu)$ para la distribución inicial $f(p, t = 0) = Ae^{-\gamma p^2}$.

v) Muestre que $\mu < 0$ y luego que A no puede tomar cualquier valor. Encuentre el valor máximo para A en terminos de funciones de Riemann.

vi) Idem. iv & v pero para $f(p, t = 0) = \frac{A}{(1+\gamma p^2)^3}$.

Problema 13

La ecuación cinética para la interacción de ondas es

$$\partial_t f(\vec{k}_1, t) = \int d^D k_2 d^D k_3 d^D k_4 T_{12,34}(f_3 f_4 f_1 + f_3 f_4 f_2 - f_1 f_2 f_3 - f_1 f_2 f_4).$$

donde $T_{12,34} = K\delta^{(D)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4)\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)$. Donde $\omega_i = \omega(k_i)$ es la relación de dispersión.

i) Muestre: $\frac{d}{dt}\int f(\vec{k}, t) d^D k = 0$, $\frac{d}{dt}\int \vec{k} f(\vec{k}, t) d^D k = 0$ y $\frac{d}{dt}\int \omega(k) f(\vec{k}, t) d^D k = 0$;

ii) Muestre el TH siguiente $\frac{d}{dt}\int \ln f(\vec{k}, t) d^D k \leq 0$.

iii) Determine las soluciones de equilibrio para $f_{eq}(\vec{k})$ y comente acerca de la convergencia de las integrales en *i)*.

iv) Para la relación de dispersión $\omega(k) = k^s$, usando análisis dimensional encuentre los comportamiento de $f(|\vec{k}|)$ que representan un flujo de partículas constante J y un flujo de energía Q constante.

Problema 14

Usando que $\delta^{(3)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \frac{1}{(2\pi)^3} d^3 k e^{ik(p_1+p_2-p_3-p_4)}$, muestre que el término de colisión de Boltzmann se escribe para funciones distribución isótropas $w_i = w(p_i) = w(|p_i|)$ de la forma (salvo constante a encontrar):

$$Coll[w] = \int_0^\infty d\epsilon_3 \int_0^\infty d\epsilon_4 T_{1,2;3,4}(w_3 w_4 (1 + w_1)(1 + w_2) - w_1 w_2 (1 + w_3)(1 + w_4)),$$

donde $\epsilon_i = p_i^2/2m$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_1 \geq 0$ donde $T_{1,2;3,4}$ depende explicitamente de los ϵ's y vale

$$T_{1,2;3,4} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \int_0^\infty \Pi_{i=1}^4 \sin\left(k\sqrt{\epsilon_i/\epsilon_1}\right) \frac{dk}{k^2} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \min\left\{\sqrt{\epsilon_1}, \sqrt{\epsilon_2}, \sqrt{\epsilon_3}, \sqrt{\epsilon_4}\right\}$$

Problema 15

Si

$$Coll_3[w] = \int_0^\infty d\epsilon_3 \int_0^\infty d\epsilon_4 T_{1,2;3,4}(w_3 w_4 w_1 + w_3 w_4 w_2 - w_1 w_2 w_3 - w_1 w_2 w_4)),$$

donde $\epsilon_i = p_i^2/2m$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_1 \geq 0$ donde $T_{1,2;3,4}$ depende explicitamente de los ϵ's y vale

$$T_{1,2;3,4} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \int_0^\infty \Pi_{i=1}^4 \sin\left(k\sqrt{\epsilon_i/\epsilon_1}\right) \frac{dk}{k^2} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \min\left\{\sqrt{\epsilon_1}, \sqrt{\epsilon_2}, \sqrt{\epsilon_3}, \sqrt{\epsilon_4}\right\}$$

i) Calculer $Coll_3[\epsilon^{-\nu}]$.

i) Muestre siguiendo el artículo de Zakharov [V.E. Zakharov, Sov. Phys. JETP **24**, 455 (1967)] que $Coll_3[\epsilon^{-\nu}]$ se anula para $\nu = 0, 1, 7/6$ & $3/2$

Entrega Jueves 18 de noviembre 2004 antes de 11:45 hrs