Coloquio Condesación de Bose-Einstein

Tarea 2

Profesor: Sergio Rica

Problema 6

La teoría de Landau de la superfluidez[1] introduce el concepto de espectro de excitatción ques una curva continua con dos comportamientos diferentes:

$$\begin{aligned}\varepsilon(p) &= cp, \qquad p \ll p_0\\ \varepsilon(p) &= \Delta + \frac{1}{2\mu}(p-p_0)^2, \qquad p \approx p_0.\end{aligned}$$

$c = 240m/s$ la velocidad del sonido, mientras que Landau calcula a partir de las variables termodinámicas:

$$\Delta = 9.6^\circ K, \quad \frac{p_0}{\hbar} = 1.95\mathring{A}^{-1}, \quad \mu = 0.77\ m_{He}.$$

Experiementos usando *scattering* de neutrones fijan a los valores actuales

$$\Delta = 8.65^\circ K, \quad \frac{p_0}{\hbar} = 1.92\mathring{A}^{-1}, \quad \mu = 0.16\ m_{He}.$$

En la teoría de Landau, las propiedades termodinámicas son la manifestación de las excitaciones térmicas de las quasiparticules, i.e. un gas ideal de fonones et rotones bosónicos.

Como el número de excitaciones N_{exc} no es conservado. El equilibre termodinámi co es definido por

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N_{exc}}\right)_{T,V} = 0;$$

i) Muestre que

$$\begin{aligned}F &= k_B T V \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p\ \ln\left(1-e^{-\beta\varepsilon(p)}\right);\\ N_{exc} &= V\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p\ \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(p)}-1},\end{aligned}$$

$\beta = 1/(k_B T)$.

[1] L.D. Landau, J. Phys. U.S.S.R. **5**, 71 (1942); L.D. Landau, J. Phys. U.S.S.R. **11**, 91 (1947).

ii) demuestre dando valores numéricos [2] que a bajas temperaturas la contribución de fonones ($\varepsilon(p) = cp$) es dominante mientras que a temperaturas mayores es espectro de rotones que domina.

Muestre :

iii)

$$\begin{aligned} F_{ph} &= -\frac{\pi^2}{90} V k_B T \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3; \\ N_{ph} &= \frac{\zeta(3)}{\pi^2} V \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3; \end{aligned}$$

$\zeta(3) = 1.202$.

iv)

$$\begin{aligned} F_r &= -k_B T N_r; \\ N_r &= V \frac{2(\mu k_B T)^{1/2} p_0^2}{(2\pi)^{3/2}\hbar^3} e^{-\Delta/k_B T}. \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} S_{ph} &= V k_B \frac{2\pi^2}{45} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3; \\ S_r &= N_r k_B \left(\frac{3}{2} + \frac{\Delta}{k_B T}\right); \\ (C_v)_{ph} &= V k_B \frac{2\pi^2}{15} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3; \\ (C_v)_r &= N_r k_B \left(\frac{3}{4} + \frac{\Delta}{k_B T} + \left(\frac{\Delta}{k_B T}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Dibuje ellos en función de la temperatura.

Problema 7

Explique el criterio de velocidad crítrica de Landau[3] y evalue la velocidad crítica en HeII.

[2] Les constantes $\frac{\hbar}{k_B} = 7.64 \cdot 10^{-12}\ {}^\circ K sec$ et pour l'Hélium II $\frac{\hbar}{m} = 1.58 \cdot 10^{12} \mathring{A}^2/sec$ et $n = \frac{1}{45}\mathring{A}^{-3}$. Donc

$$T_0 = 3.32 \times 7.64 \times 1.58 \times 46^{-2/3} = 3.12^\circ K$$

[3] L.D. Landau, J. Phys. U.S.S.R. **5**, 71 (1942)

Problema 8

Suponga que el gas de excitaciones se mueve con velocidad $\mathbf{v}$, muestre que el *momentum* total de las quasipartículas es:

$$\mathbf{P} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p\ \mathbf{p}\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon(p)-\mathbf{p}\cdot\mathbf{v})}-1}$$

Defina la densidad normal $\rho_n = \lim_{v\to 0}\frac{\mathbf{P}}{v}$ y muestre

$$\begin{aligned}(\rho_n)_{ph} &= \frac{2\pi^2\hbar}{45c}\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^4;\\ (\rho_n)_r &= \frac{p_0^2 N_r}{3k_BTV}.\end{aligned}$$

estime tanto a partir de los valores de Landau como de los experimentos con neutrones T_λ.

Problema 9

A partir del calculo realizado en clases para un gas de bose casi perfecto, muestre que

$$\rho-\rho_0 = \int\frac{d^Dp}{(2\pi\hbar)^D}\frac{1}{e^{\epsilon_B(p,\mu,|\Psi_0|^2)/k_BT}-1}\frac{T_p}{\epsilon_B(p,\mu,|\Psi_0|^2)}, \tag{1}$$

$$\mu-2\frac{2\pi\hbar^2 f}{m}\rho_0 = -8\left(\frac{2\pi\hbar^2 f}{m}\right)^2\rho_0\int\frac{d^Dp}{(2\pi\hbar)^D}\frac{1}{e^{\frac{\epsilon_B(p,\mu,\rho_0)}{k_BT}}-1}\frac{1}{\epsilon_B}. \tag{2}$$

Sean $T_{BE} = \frac{2\pi}{\zeta(3/2)^{2/3}}\frac{\hbar^2}{mk_B}\rho^{2/3}$, $\alpha = \zeta(3/2)^{2/3}f\rho^{1/3}$, $y = \left(\frac{\mu}{k_BT_{BE}} - 2\alpha\frac{\rho_0}{\rho}\right)$, $t = T/T_{BE}$ y $\xi = \rho_0/\rho$, entonces muestre que (1) y (2) se escriben:

$$1 = \xi + t^{3/2}\frac{4}{\sqrt{\pi}\zeta(3/2)}\int_0^\infty\frac{1}{e^{\hat{\epsilon}(x,y,t,\xi)}-1}\frac{(x^2-y/t+2\alpha\xi/t)}{\hat{\epsilon}(x,y,t,\xi)}x^2dx, \tag{3}$$

$$y = -8\alpha^2\xi t^{1/2}\frac{4}{\sqrt{\pi}\zeta(3/2)}\int_0^\infty\frac{1}{e^{\hat{\epsilon}(x,y,t,\xi)}-1}\frac{x^2dx}{\hat{\epsilon}(x,y,t,\xi)}. \tag{4}$$

donde $\hat{\epsilon}(x,y,t,\xi) = \sqrt{(x^2-y/t+2\alpha\xi/t)^2 - 4\alpha^2\xi^2/t^2}$.

Resuelva numéricamente[4] este sistema acoplado para $\alpha = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ y grafique y, ξ vs. t.

[4]Puede tartar de iterar simpelmente :

$$y_{n+1} = -8\alpha^2\xi t_n^{1/2}\frac{4}{\sqrt{\pi}\zeta(3/2)}\int_0^\infty\frac{1}{e^{\hat{\epsilon}(x,y_n,t_n,\xi)}-1}\frac{x^2dx}{\hat{\epsilon}(x,y_n,t_n,\xi)}$$

Problema 10

A partir del Hamiltoniano diagonal

$$H = \sum_p{}' \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{8\pi\hbar^2 f |a_0|^2}{mV} \right) a_p^\dagger a_p + \frac{2\pi\hbar^2 f}{mV} [2(N - n_0)^2 + n_0^2] \tag{5}$$

muestre que la transición de Bose-Einstein es subcrítica.

Estudie la dependencia de la presión como función de la densidad total $\rho = N/V$.

Entrega Jueves 11 de noviembre 2004 antes de 11:45 hrs

---

y

$$t_{n+1} = \left(\frac{1-\xi}{\frac{4}{\sqrt{\pi}\zeta(3/2)} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\hat{\epsilon}(x,y_n,t_n,\xi)}-1} \frac{\left(x^2 - y_n/t_n + 2\alpha\xi/t_n\right)}{\hat{\epsilon}(x,y_n,t_n,\xi)} x^2 dx} \right)^{2/3}.$$