

# Coloquio Condensación de Bose-Einstein

## Tarea 1

Profesor: Sergio Rica

### Problema 1

Sea un gas perfecto de  $N$  bosones en un volumen  $V$ .

*i)* Grafique la presión versus el volumen paramétricamente en función del potencial químico.

*ii)* Encuentre y grafique el calor específico y la entropía del gas a toda temperatura.

*iii)* Determine el valor de la discontinuidad de la derivada  $\frac{\partial C_V}{\partial T}$  en  $T_{BE}$ .

*iv)* Para el helio líquido se tiene  $\frac{\hbar}{m} = 1.58 \cdot 10^{12} \text{Å}^2/\text{sec}$  y densidad numérica  $n = \frac{1}{45} \text{Å}^{-3}$ . Comparar los valores dados por la transición de Bose-Einstein de la temperatura y entropía a los de la transición de Helio superfluido:  $T_\lambda = 2.17^\circ K$  y  $S = 0.8 N k_B$ .

### Problema 2

Muestre que si  $\zeta_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$  entonces  $\zeta_{s-1}(z) = z \frac{\partial \zeta_s(z)}{\partial z}$ .

A partir de la expresión integral para  $\zeta_s(z)$  muestre que  $\zeta_s(z) \approx a_{3/2}(-\log z)^{3/2} + a_0 + a_1(-\log z) + a_2(-\log z)^2 + \dots$  encontrando los  $a$ 's.

### Problema 3

*i)* Estudie la transición de Bose-Einstein en dimensión  $D$ .

*ii)* Considere un volumen rectangular de dimensiones  $\ell_x, \ell_y$  &  $\ell_z$ . Determine el valor de expectación para el número de partículas en términos de la función

$$\psi(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-s\pi n^2}.$$

*iii)* Discuta la condensación de Bose-Einstein en un cubo finito.

*iv)* Discuta la condensación de Bose-Einstein en el límite  $\ell_x, \ell_y \rightarrow \infty, \ell_z$  finito.

*v)* *Idem*,  $\ell_z \rightarrow 0$

## Problema 4

Considere un gas de átomos bosónicos, por ejemplo de rubidio, que se coloca en una trampa magnética. La trampa, para todos los efectos prácticos, funciona como un potencial armónico  $U(r) = \frac{1}{2}m\omega_B^2 r^2$ .

*i)* Muestre que el gas puede experimentar la condensación de Bose-Einstein y determine la temperatura de transición.

*ii)* Interprete la condensación en este caso.

## Problema 4

Sea un gas de bosones libres en dimensión espacial  $D$ , donde la energía cinética de las partículas es  $\epsilon_p = cp^\sigma$ . ( $c$  tiene las unidades adecuadas).

*i)* Discuta la existencia de condensación del tipo Bose-Einstein para valores diferentes de  $D$  y  $\sigma$ .

*ii)* Para un gas ultra-relativista de bosones  $\epsilon_p = cp$ , determine la presión y volumen específico como función del potencial químico. Dibuje el diagrama  $P-v$ . Si hay condensación cuáles son los valores críticos para presión y volumen?

El comportamiento ultra-relativista  $\epsilon_p = cp$  es válido para altas energías incompatibles con momento nulo. En general se tiene  $\epsilon_p = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$ .

*iii)* Muestre que

$$\frac{1}{v} \equiv \frac{N}{V} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \frac{k_B T}{mc^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} K_2\left(n \frac{mc^2}{k_B T}\right)$$

donde  $z = e^{\mu/k_B T}$  y  $K_2(x)$  es una función de Bessel.

*iv)* Existe condensación de Bose-Einstein entonces en un gas relativista? Discuta el límite  $m \rightarrow 0$ . Discuta el límite  $c \rightarrow \infty$ .

Entrega Jueves 4 de noviembre 2004 antes de 11:45 hrs