

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Parte de los avances en física a lo largo de su historia han sido hechos al incorporar nuevas simetrías en la descripción de las leyes físicas. No siempre estas simetrías son descubiertas en forma directa, a menudo es el descubrimiento de nuevas leyes físicas lo que acarrea consigo la incorporación de nuevas simetrías en la descripción del mundo físico.

Así tenemos que inicialmente la mecánica trataba las direcciones “horizontal” en forma simétrica mientras que la “vertical” jugaba un papel privilegiado. La isotropía tridimensional se introdujo en la física solo con el nacimiento de la teoría de la gravitación de Newton. También la homogeneidad del espacio es incorporada a la física por Newton como una nueva simetría. Los

cuerpos geométricos tienen normalmente algún tipo de simetría. Simétrica es la ley de Coulomb, etc.

Una simetría se describe en matemáticas como la invariancia bajo una cierta transformación. Por ejemplo, la homogeneidad del espacio se expresa como la invariancia de éste bajo traslaciones arbitrarias. Una de las tantas simetrías de un cubo se describe como la invariancia del cubo al ser rotado en $\frac{\pi}{2}$ alrededor de un eje que pasa por el centro de dos caras opuestas. La simetría de la ley de Coulomb $1/r$ se refiere a la invariancia de ésta a rotaciones arbitrarias alrededor de cualquier eje que pase por el centro ($r = 0$) del potencial.

Salvo contadas excepciones a cada simetría o conjunto de simetrías combinadas le corresponde una cantidad conservada y/o reglas de selección. Sistemas

físicos que se mueven en un espacio homogéneo (invariancia a traslaciones) tienen un momento lineal conservado. Si además este espacio es isótropo habrá momento angular conservado. La conservación de la energía se puede deducir de la homogeneidad del tiempo, o sea, invariancia del Hamiltoniano del sistema a traslaciones temporales.

A menudo sucede en física que una nueva simetría es descubierta como consecuencia de descubrir una cantidad conservada o ambos descubrimientos son hechos en forma independiente y por lo tanto ellos se corroboran. Un caso notable es el descubrimiento de la invariancia (covariancia) de las ecuaciones de Maxwell bajo el grupo de Lorentz y poco después el descubrimiento de la constancia de la velocidad de la luz.

Otras dos simetrías notables de un gran número de leyes físicas son la invariancia bajo reflexiones y que conduce al concepto de paridad conservada en mecánica cuántica y la invariancia bajo inversión temporal la cual *no tiene* una cantidad conservada asociada.

Hasta aquí se han mencionado simetrías de carácter puramente geométrico o cinemático. Existen también simetrías dinámicas. Tal es el caso, por ejemplo, del descubrimiento de Galileo de que

la aceleración de los cuerpos en caída libre es constante e independiente de la masa considerada. Otro ejemplo mucho menos trivial de simetría dinámica es aquella de los potenciales centrales tales que tienen órbitas cerradas. Existen solo dos potenciales de este tipo de simetría, $1/r$ (Coulombiano) y r^2 (oscilador armónico); las respectivas simetrías dinámicas de estos dos casos son mucho mayores que la simple simetría de rotación del potencial. Se puede demostrar que corresponden a los *grupos* $SO(4)$ y $SU(3)$ respectivamente.

El estudio de simetrías lleva en forma natural al estudio de la teoría de grupos, y esto se debe a lo siguiente: i) si hay dos transformaciones T_a y T_b que dejan invariante a un sistema, entonces los dos productos: $T_a T_b$ y $T_b T_a$ son nuevas transformaciones que también dejan invariante al sistema (estas dos transformaciones son en general diferentes); ii) no es difícil ver que también el producto de transformaciones de simetría es asociativo, $T_a(T_b T_c) = (T_a T_b)T_c$; iii) evidentemente la transformación identidad es una transformación de simetría (deja invariante al sistema); iv) con un simple razonamiento se puede ver que si una transformación sobre un sistema determinado es de simetría también su inversa lo es. Estas cu-

atro propiedades son necesarias y suficientes para asegurar que el conjunto de todas las transformaciones de simetría de un sistema forman un grupo.

La finalidad de estas notas es enseñar los elementos básicos de utilización del concepto de grupos de simetría en sistemas cuánticos. Esto, sin embargo, no es posible desde el comienzo de la exposición ya que primero se debe aprender la teoría matemática básica, esto es, teoría de grupos.

Estas notas están divididas en tres partes, las dos primeras son principalmente una exposición de teoría de grupos. En la *Parte I* se da los primeros rudimientos de teoría de grupos abstractos con un número finito de elementos lo que luego se ilustra estudiando las simetrías de diversos cuerpos geométricos (simetrías puntuales). A continuación se ve la parte matemática más fundamental del curso, que es la teoría de representaciones de grupos (finitos). Esta primera parte se finaliza dando algunas aplicaciones físicas esquemáticas y muy generales. La *Parte II* comienza con un capítulo sobre el grupo simétrico (grupo de permutaciones de n objetos) en el que se da algunos resultados básicos y varias “recetas” que son necesarias más adelante. Este

es uno de los puntos más débiles del curso pero aparentemente nada puede hacerse por superar esta definición dada la enorme complejidad de las demostraciones de las propiedades del grupo simétrico. La mayor parte de la segunda parte del curso está dedicada al estudio de los llamados grupos de Lie, que son grupos con un continuo de elementos (ej. grupos de rotaciones). Nuevamente aquí debe entregarse una enorme cantidad de resultados sin demostración alguna más que nada por falta de tiempo ya que las demostraciones no son de gran complicación. Sin duda el tema grupos de Lie podría dar para un curso completo. También en esta segunda parte se dan algunas breves aplicaciones físicas. Es recién en la Parte III del curso que el análisis de sistemas físicos concretos toma el primer plano. Consta esta parte de tres capítulos dedicados a átomos, moléculas diatómicas y sólidos cristalinos respectivamente.

A lo largo del curso se ilustra específicamente cómo la teoría de grupos: sirve como guía para buscar y/o interpretar leyes dinámicas, sirve como apoyo para resolver ecuaciones físicas y para etiquetar las soluciones, en particular permite describir adecuadamente la degeneración del espectro de Hamiltonianos cuánticos, permite fácilmente

deducir las reglas de selección de transiciones entre los niveles discretos de energía de un sistema, ayuda a construir en forma natural conjuntos completos de soluciones aproximadas ortogonales, permite una sencilla descripción cualitativa de los efectos de una perturbación en el desdoblamiento de los niveles de energía de un sistema cuántico, es una herramienta útil para el estudio del acoplamiento de dos sistemas de simetría conocida etc.

Tan útiles son las simetrías y por lo tanto teoría de grupos en física, que existe una constante búsqueda de ellas (lo cual, como ya se ha dicho está intimamente ligado a la búsqueda de cantidades conservadas) y a menudo se recurre al artificio no de buscar simetrías exactas sino aproximadas, cuando las primeras no existen con toda la riqueza necesaria. Un caso típico lo encontramos en el estudio de átomos. Como simetría aproximada se supone que los elementos giran independientemente alrededor del núcleo sin “sentirse” unos a otros, esto lleva al concepto de orbitales n^2 tal como se encuentran en los

textos elementales de química. Solo la aproximación más fina de considerar la interacción entre los electrones lleva al concepto de cantidades como momento angular total L del átomo.

Es importante que el alumno se de cuenta que este curso sólo entrega una parte menor de las aplicaciones de teoría de grupos en física cuántica. Aparte de lo incompleto que quedan los temas físicos tratados en la tercera parte del curso, como es fácil de comprobar simplemente consultando algunos de los textos y tratados que aparecen al final de la introducción, también debemos mencionar que existe una interesantísima gama de aplicaciones del concepto de grupos de simetría en otras ramas de la física como son física nuclear y física de partículas. Esperamos, sin embargo, que con la base conceptual contenida en este curso, no sea difícil profundizar los temas en forma independiente y también penetrar en los temas no tocados de estas materias.

P.C.

1.2. Bibliografía

1. B.F. Bayman "Groups and their applications to spectroscopy"
2. H. Bethe, R. Jekiw "Intermediate Quantum Mechanics"
3. H. Bethe, E.E. Slapeter "Quantum Mechanics of one and two electrons" Handbuch der Physik, band XXXV.
4. H. Boerner, "Representation of groups"
5. E.U. Condon, G.H. Shortley "The theory of atomic spectra"
6. L.P. Eisenhart, "Constituons groups of transformations"
7. L.M. Falicov, "Group theory and its physical applications"
8. L. Fonda, G.C. Ghiradi "Symmetry principles in quantum physics"
9. M. Hamermesh, "Group theory" *¹
10. R. Heine, "Group theory in quantum mechanics"
11. R. Herman, "Lie groups for physicists"
12. B.R. Judd, "Second quantization and atomic spectroscopy"
13. L.D. Landau, E.M. Lifshits "Quantum mechanics"
14. H. Lipkin, "Lie groups for pedestrians"
15. G.J. Liubarskii, "Group theory and its application to physics"
16. E.M. Loebel (Ed), "Group theory and its applications"
17. A. Massiah "Quantum mechanics"
18. M.I. Petrashen, E.D. Trifonov, "Applications of group theory in quantum mechanics"
19. G. Racah, "Group theory and spectroscopy" (Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, band 37).
20. J.C. Slater, "Quantum theory of atomic spectra" v.2
21. J.C. Slater, "Quantum theory of molecules and solids" V.1 & 2
22. R. Stevenson, "Multiplet structure of atoms and molecules"
23. M. Tinkham, "Group theory and quantum mechanics"
24. H. Weyl, "The theory of groups and quantum mechanics"
25. H. Weyl, "The calssical groups"
26. E. Wigner, "Group theory"
27. E.B. Wilson, J.C. Decuns, P.C. Gros, "Molecular Vibrations"

¹Una buena parte del curso ha sido tomada de la Ref. 9 y algo más adelante también de la ref. 23. Otras referencias generales son las 10, 24 y 26.

Parte I

Rudimentos

Capítulo 2

Conceptos básicos y ejemplos

2.1. Definiciones

Grupo es un conjunto G con aplicación $G \times G \rightarrow G$ llamada producto y que tiene las siguientes propiedades,

- i) Producto: a todo par ordenado ab de elementos de G está asociado otro elemento de G , $c = ab$.
- ii) El producto es asociativo: $a(bc) = (ab)c$.
- iii) Existe un elemento neutro, denotado e , tal que $ae = ea = a$ y a e se le llama la unidad.
- iv) A todo elemento a de G le está asociado otro elemento de G , llamado el inverso de a , a^{-1} y se cumple que $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

De esta definición se desprende que cualquier grupo queda totalmente caracterizado por su tabla de multiplicación, es decir, la ley que asocia a cada par ordenado de elementos del grupo un nuevo elemento del grupo. Un ejemplo muy simple es el siguiente,

e	a	b		e	a	b		aa	=	b
a	b	e	que debe leerse	a	aa	ab	con	ab	=	e
b	e	a		b	ba	bb		ba	=	e
								bb	=	a

EJERCICIO: Construya un grupo de cuatro elementos (e, a, b, c) cuidando que se cumplan todas las propiedades del producto.

Grupo *abeliano* es un grupo conmutativo, esto es, $ab = ba \quad \forall a, b \in G$.

De la tabla de multiplicación de un grupo se reconoce que este es abeliano si la tabla es simétrica con respecto a la diagonal.

Dos grupos G y G' se dicen *isomorfos* ($G \simeq G'$) si existe una aplicación biunívoca entre ellos que preserve el producto. Así si $a \Leftrightarrow a'$ y $b \Leftrightarrow b'$ entonces $ab \Leftrightarrow a'b'$. Por lo tanto las tablas de multiplicación de grupos isomorfos son equivalentes.

EJERCICIO: Demostrar que todos los grupos de tres elementos son isomorfos.

Todos los grupos se pueden separar en tres *tipos de grupos*: los grupos *finitos*, los *grupos infinitos numerables* y los *infinitos no numerables o continuos*. Ya hemos dado un ejemplo de grupo finito. Un grupo infinito numerable es el de todas las traslaciones que llevan a hacer coincidir una red cristalina infinita con sí misma. El grupo de rotaciones es un ejemplo de grupo continuo.

El *orden* γ de un grupo finito es el número de elementos de grupo.

Un subconjunto H de un grupo G se dice *subgrupo de G* si sus elementos forman un grupo con la misma ley de multiplicación que G y se denota $H \leq G$. Es claro que el grupo completo G y el conjunto formado sólo por la unidad e son subgrupos de G ; estos se llaman *subgrupos triviales*. Si H es un subgrupo no trivial de G se dice que es *subgrupo propio* y se denota $H < G$.

Si G es grupo finito y $g \in G$ llamaremos *orden de g* al menor entero n para el cual se cumple $g^n = e$.

TEOREMA DE LAGRANGE: si $H \leq G$, G de orden n y H de orden p entonces $m = n/p$ es un entero, que llamaremos *índice de H con respecto a G* . (Ver Prob. 2.1)

Un elemento g_1 se dice *conjugado* a otro elemento g_2 de G si existe un tercer elemento g_3 de G tal que $g_1 = g_3 g_2 g_3^{-1}$ y se escribe $g_1 \simeq g_2$. Es fácil ver que ésta es una relación de equivalencia, o sea,

- i) $g \simeq g$
- ii) $g_1 \simeq g_2 \Leftrightarrow g_2 \simeq g_1$

iii) si $g_1 \simeq g_2$ y $g_2 \simeq g_3 \Rightarrow g_1 \simeq g_3$

de modo que se puede decir que dos elementos son conjugados en vez de decir que uno es conjugado del otro.

Las clases en que queda dividido el grupo G debido a la relación \simeq se llaman *clases conjugadas*. Es trivial verificar que el subconjunto formado solo por la unidad constituye una clase conjugada.

Si $H \leq G$ y sucede que $H_a = H$ para todo $a \in G$ entonces H se llama *subgrupo invariante* de G y se escribe $H \trianglelefteq G$. Los dos subgrupos triviales de G son subgrupos invariantes. Si H es subgrupo propio y además invariante entonces se abrevia $H \triangleleft G$. Todos los subgrupos de un grupo abeliano son subgrupos invariantes.

Un grupo G que no posee subgrupos invariantes propios se llama *simple*.

Un grupo que no posee subgrupos invariantes abelianos se llama *semi simple*. Todo grupo simple es semisimple pero no al revés.

El *coseto izquierdo* de $H \leq G$ con respecto a $a \in G$ es el subconjunto $aH = \{b \in G \mid b = ah \text{ todo } h \in H\}$, el *coseto derecho* se define como Ha (algunos textos toman las definiciones a la inversa).

Es fácil demostrar que si un subgrupo H de G es invariante entonces cada coseto izquierdo es igual al respectivo coseto derecho, $aH = Ha$. Considerando estos cosetos (sin apellido) como elementos de un conjunto y definiendo sobre este conjunto la ley de multiplicación $(aH)(bH) = (ab)H$ se verifica que queda definido un grupo que recibe el nombre de *grupo cociente* G/H .

Si un grupo G tiene una familia de subgrupos H_1, H_2, \dots, H_n tal que se cumple

$$i) \quad h_i h_j = h_j h_i \quad \forall i, j, h_i \in H_i, h_j \in H_j$$

$$ii) \quad \forall g \in G \exists! h_1 \in H_1, h_2 \in H_2, \dots, h_n \in H_n \quad g = h_1 h_2 \dots h_n$$

entonces se escribe $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ y se dice que G es el *producto directo* de sus subgrupos $H_1 \dots H_n$.

2.2. El grupo simétrico

El *grupo simétrico* \mathcal{S}_n de orden $\gamma = n!$ es el grupo de todas las operaciones de permutación entre n objetos. Rotulando estos objetos con un índice i que toma los valores $i = 1, 2, \dots, n$, cada permutación puede caracterizarse por la permutación de estos índices. Un elemento típico de \mathcal{S}_n se escribe

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots & n \\ P_1 & P_2 & P_3 \cdots & P_n \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

y que quiere decir que 1 pasa a p_1 , 2 pasa a p_2 etc. donde $p_1 \cdots p_n$ no son sino una reordenación de los mismos números de 1 a n .

Concretamente consideremos el elemento

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Una notación mucho más compacta y cómoda escribe cada permutación como producto de *ciclos*. Así, el ejemplo anterior se escribe,

$$P = (123)(45)(67)(8),$$

Dentro de cada ciclo un número pasa en aquel que tiene a su derecha y el último número de cada ciclo pasa en el primero del mismo ciclo. Los ciclos que tienen un solo número suelen omitirse, $P = (123)(45)(67)$ pero entonces debe aclararse que se trata de un elemento de \mathcal{S}_8 . Nótese además que un ciclo se llama así porque es cíclico, $(123 \dots n) = (n12 \dots n-1) = (i, i+1, \dots, n, 1, 2, 3 \dots i-1)$.

Para aprender a multiplicar permutaciones volvamos a la notación usada en (2.2.1). Consideremos el producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este se ha calculado como sigue. Se supone que primero actúa la permutación que está a la derecha. Así 1 pasa a 1 y en la permutación de la izquierda 1 pasa a 3, resultado total: 1 pasa a 3. Nuevamente en la permutación de la derecha 2 pasa a 3 y en la de la izquierda 3 pasa a 2, resultado total: 2 pasa a 2. Finalmente 3 pasa a 2 y luego 2 pasa a 1 luego

3 pasa a 1. El efecto total queda resumido en el resultado que se escribe a la derecha de la igualdad. Este mismo cálculo se puede hacer usando ciclos:

$$(132)(23) = (13).$$

Para obtener el lado derecho de la igualdad se procede siempre considerando primero la acción que sobre un número tiene el ciclo de más a la derecha y luego la acción que tiene sobre este nuevo número el ciclo que está a la izquierda; así 2 pasa en 3 y luego 3 pasa en 2 lo que da como resultado que 2 pasa en 2, que no se escribe en el lenguaje de ciclos; nuevamente considerando el ciclo de la derecha 3 pasa en 2 y en el de la izquierda 2 pasa en 1, luego 3 pasa a 1. Finalmente el ciclo de la derecha 1 en este ciclo, pero en el de la izquierda 1 pasa en 3 lo cual da como resultado neto que 1 pasa en 3. Estos resultados están resumidos a la derecha de la igualdad. Con práctica estos productos se pueden hacer muy rápidamente.

EJERCICIO: Verifique que

$$\begin{pmatrix} 12345678 \\ 31476825 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12345678 \\ 23154768 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14367285 \end{pmatrix}$$

y repita el cálculo usando ciclos.

Para calcular el *inverso de una permutación* es más fácil usar la notación de ciclos. El inverso de $(abc...yz)$ es $(zy...cba)$.

Ciclos que no tienen números en común conmutan, pero si tienen números en común en general con conmutan. Compruébese por ejemplo que $(23)(123) = (12)$ mientras el producto invertido da (13) .

La *paridad de un ciclo* es $+$ (par) ó $-$ (impar) según si la cantidad de número en el ciclo es impar o par (nótese que es al revés) o sea, una trasposición (ciclo de dos números) es impar, un tríciclo es par, etc. Una *permutación es par o impar* según sea el producto de las paridades de los ciclos que la componen es par o impar. Ejemplo: la permutación P definida al comienzo de esta sección es par ya que está compuesta de tres ciclos de paridades $+$, $-$, $-$.

Se llama *grupo alternante* A_n al subgrupo de \mathcal{S}_n de todas las permutaciones pares. Su orden es $\frac{1}{2}n!$

TEOREMA DE CAYLEY: Todo grupo finito G de orden n es isomorfo a un subgrupo de \mathcal{S}_n

2.3. Elementos de simetría puntual

La *simetría de un cuerpo* se describe dando el conjunto de todas las transformaciones geométricas que preservan las distancias entre cualesquiera par de puntos del cuerpo y que llevan al cuerpo a coincidir consigo mismo. Toda transformación de este tipo se dice de simetría.

Las transformaciones básicas de simetría son

- i) rotaciones (en general discretas)
- ii) reflexiones

Si un cuerpo es infinito en extensión (ejemplo, red cristalina ideal) también se incluye entre las transformaciones de simetría básica ciertas traslaciones discretas. Por ahora nos limitaremos a cuerpos finitos.

Los grupos finitos generados por las dos operaciones básicas mencionadas más arriba se llaman *grupos puntuales*, y se caracterizan por dejar por lo menos un punto del cuerpo invariante. Todos los ejes de rotación y planos de reflexión pasan por este punto, que recibe el nombre de *centro*.

Más explícitamente los *elementos de simetría* son,

- C_n rotación en un ángulo $\frac{2\pi}{n}$ alrededor de un eje fijo. En particular se tiene que $C_1 = e$, $C_n^m = C_{n/m}$, $C_n^n = e$
- σ es una reflexión en un plano que recibe el mismo nombre. Siempre se cumple que $\sigma^2 = e$. Cuando la simetría del cuerpo tiene un *eje principal* este define la dirección *vertical* y por lo tanto la horizontal. Se designa con el símbolo σ_v a un plano de reflexión que contiene al eje principal y σ_h es el plano de reflexión perpendicular al eje principal.
- U_2 designa a un eje de rotación en π perpendicular al eje principal.
- S_n es la operación que se llama *rotoreflexión* y se define por

$$S_n = C_n \sigma_h = \sigma_h C_n$$

Es importante notar la diferencia que existe entre una rotoflexión par y una impar

$$(S_n)^n = \begin{cases} \sigma_h & \text{si } n \text{ es impar} \\ e & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

de lo cual se desprende que si n es impar S_n es un elemento del grupo de simetría de un cuerpo, necesariamente también lo son σ_h y C_n ya que todas las potencias de un elemento del grupo también son elementos de ese grupo. Si n es par S_n puede ser elemento de un grupo de simetría sin que σ_h ó C_n tengan que serlo.

I : con este símbolo se designa la inversión con respecto al origen,

$$I = S_2.$$

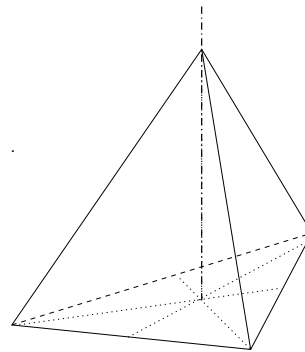
Corolario de esta propiedad es que las clases conjugadas de los grupos de simetría están constituidas por operaciones de la misma naturaleza. Dos elementos de simetría conjugados se dicen *equivalentes*.

Nota: No debe confundirse el grupo como estructura abstracta, definida exclusivamente a través de su ley de multiplicación con la estructura concreta a través de la cual los grupos son normalmente definidos en física. En el caso actual a través de operaciones geométricas definidas en el espacio físico tridimensional. Es por medio de la definición concreta que se obtiene la ley de multiplicación y por lo tanto la estructura abstracta. Nuestra notación no siempre hará diferencia entre estos dos significados.

2.4. Ejemplos de grupos

2.4.1. El grupo puntual C_{3v}

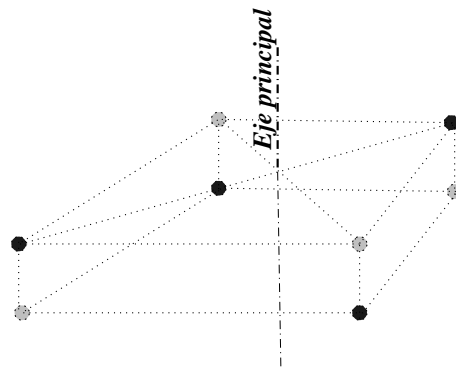
Un tetraedro cuya base es un triángulo equilátero y cuyo vértice superior está sobre la perpendicular a la base que nace en el centro de gravedad de ella es invariante con respecto a la operación C_3 y también con respecto a cada plano de reflexión que contiene a un vértice de la base y al eje principal de la figura. El grupo



tiene, en total, seis elementos (transformaciones de simetría de la figura), $(e, C_3, C_3^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ y el grupo tiene tres clases conjugadas: (e) , (C_3, C_3^2) , $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

2.4.2. El grupo puntual D_{2d}

El grupo D_{2d} es el grupo de simetría de un polihedro rectangular de base cuadrada que tiene dos tipos de vértices, como se aprecia en la figura adjunta. Debido a esto último la figura no es invariante a rotaciones C_4 (en $\pi/4$) en torno al eje principal, sino tan solo a rotaciones C_2 (en $\pi/2$). Una operación menos trivial que también deja invariante la figura es



$$S_4 = \sigma_h C_4$$

Esta es una rotación en $\pi/4$ en torno al eje principal, seguida por una reflexión con respecto a un plano horizontal que corta a la figura en sus dos mitades. Ninguno de los factores (σ_h y C_4) son operaciones de simetría, pero sí lo es S_4 . Es trivial ver que $S_4^2 = C_2$. También hay cuatro planos verticales de reflexión (que contienen al eje principal) que son planos de simetría, dos son diagonales y dos son paralelos a algunas de las aristas horizontales. Se menciona que otras operaciones de simetría son rotaciones C_2 en torno a ejes horizontales que pasan por el centro de caras opuestas perpendicular al eje principal. Un C_2 perpendicular al eje principal suele denominarse U_2 .

En total, se puede ver, que este grupo tiene ocho elementos.

2.4.3. Los grupos puntuales T_d y O_h

Se deja como ejercicio encontrar los grupos de simetría del tetraedro regular, T_d y del cubo, O_h . Estos grupos tienen 24 y 48 elementos respectivamente y T_h es subgrupo de O_h .

2.4.4. Algunos grupos continuos

En los grupos continuos, como el grupo de rotaciones, es posible caracterizar sus elementos por los valores de unos pocos parámetros reales y continuos (e.g., los ángulos de Euler en el caso del grupo de rotaciones: $SO(3)$). Si estos parámetros tienen un rango finito de variación se dice que el grupo continuo es *compacto*. El grupo de transformaciones de Lorentz no es compacto, porque además de ángulos de Euler tiene parámetros que corresponden a ángulos hiperbólicos. Las transformaciones propias de Lorentz constituyen el grupo llamado $SO(3, 1)$.

Otro grupo de mucho interés en mecánica cuántica es el grupo $O(3)$. Tiene una estructura muy sencilla en términos del grupo de rotaciones $SO(3)$. Los elementos de $O(3)$ son a) rotaciones puras $R(\hat{n}, \alpha)$ o bien b) son de la forma $IR(\hat{n}, \alpha)$ donde I es la operación de inversión. Esta última operación es aquella que simultáneamente cambia el signo de las tres coordenadas: $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$. La inversión I conmuta con todas las rotaciones, por lo que $O(3)$ es el producto directo de dos grupos,

$$O(3) = SO(3) \times \{e, I\} \quad (2.4.1)$$

2.5. Problemas

- 2.1 a) Demostrar que la relación $g_1 \simeq g_2$ divide a un grupo G en clases disjuntas; b) demostrar que $H_a = aHa^{-1}$ es un subgrupo de G si H es subgrupo de G . $H_a = \{h' \in G | h' = aha^{-1}, \forall h \in H; a \in G\}$
- 2.2 Encontrar el número de cosetos izquierdo que tiene un grupo G con respecto a un subgrupo propio H conociendo los órdenes de G y H y demostrar el teorema de Lagrange.
- 2.3 Demostrar que G/H es grupo solo si $H \leq G$.
- 2.4 Demostrar que el conjunto $\{g_i e, g_i g_2, \dots, g_i g_n\}$ donde $G = \{e, g_2, \dots, g_n\}$ es igual al conjunto de elementos de G . Esto significa que en la tabla de multiplicación de un grupo aparecen en cada columna y en cada fila todos los elementos del grupo una y solo una vez.

2.5 Construir todos los posibles grupos (tablas de multiplicar) de 4, 5 y 6 elementos. Indique cuántos esencialmente diferentes existen (no isomorfos).

2.6

$$A = \begin{pmatrix} 123456789, 10, 11, 12, 13 \\ 564137298, 12, 10, 13, 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \\ 7, 11, 9, 10, 3, 13, 1, 8, 5, 2, 4, 6, 12 \end{pmatrix}$$

Calcular AB y BA usando ciclos y también determinar A^{-1} .

2.7 Construya la tabla de multiplicación de \mathcal{S}_3 y determine sus clases conjugadas.

2.8 Considere el grupo de todas las permutaciones de los cuatro vértices de un tetraedro regular. Interprete geoméricamente cada una de estas operaciones. ¿Qué característica común tienen las operaciones geométricas asociadas a las permutaciones pares?

2.9 Sean A y B dos operaciones elementales del grupo de simetría de un cuerpo dado. Demostrar que la operación $R = ABA^{-1}$ es una operación del grupo de la misma naturaleza que B , es decir, si B es un C_n también lo es R ; si B es un σ también lo es R ; si B es un S_n también lo es R .

2.10 Encuentre la tabla de multiplicación del grupo D_{2d} y las clases conjugadas de este grupo (en una clase conjugada solo puede haber operaciones de la misma naturaleza pero no siempre las operaciones de la misma naturaleza pertenecen a la misma clase conjugada).

2.11 Determine el grupo que se genera a partir de tres operaciones C_4 en torno a ejes mutuamente ortogonales (ejes X, Y, Z).