

Si suponemos $r = r_0$ entre t_0 y $t_0 + \Delta t$, entonces

$$\theta = C \sin(\omega t + \phi)$$

Donde suponemos pequeñas oscilaciones (i.e. $\omega = \sqrt{g/r}$, de otra manera $\omega = \omega(C)$). $\phi \rightarrow$ condiciones iniciales, y C es la amplitud que varía en el tiempo.

$$\Delta E = - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} 2m(1 - \sqrt{v_0}) v_0 C^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) dt$$

$$= - \frac{2m(1 - \sqrt{v_0}) v_0 C^2 \omega^2 \Delta t}{2} = 2\pi m(1 - \sqrt{v_0}) v_0 C^2 \omega \quad \left(\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \right)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} E = T + U &= \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + m g r \frac{\theta^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} m r^2 C^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} m g r C^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 C^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta E = m r^2 C^2 \omega \Delta \omega$$

Igualando:

$$2\pi m(1 - \sqrt{v_0}) v_0 C^2 \omega = m(1 - \sqrt{v_0})^2 C^2 \omega \Delta \omega$$

$$\Delta \omega = \frac{2\pi v_0}{1 - \sqrt{v_0}} \Rightarrow \omega_1 - \omega_0 = \frac{2\pi v_0}{r_0}$$

ω va variando en el tiempo