Auxiliar FI34A 17/08

Distribución de Maxwell-Boltzmann

Si tenemos un sistema con energía $E(u)$ entonces se define la distribución de Maxwell-Boltzmann:

$$f(u) = e^{-\frac{E(u)}{K_B T}}$$

donde u son los estados posibles del sistema, K_B: constante de Boltzmann y T la temperatura del sistema.

¿Para qué sirve?
Para sacar promedios

$$\langle A \rangle = \frac{\int A(u) f(u)\, du}{\int f(u)\, du}$$

Es decir, para cada u posible, ponderamos $A(u)$ por la probabilidad de tal estado u, y "sumamos" (integramos)

En el caso más general $E(u) = E(v) = \frac{1}{2} m v^2$ (1 partícula)

$$= E(v_i) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \quad (N \text{ partículas})$$

Veamos un ejemplo: calculemos $\langle E \rangle$ si $E = \frac{1}{2} m v^2$

$$\langle E \rangle = \frac{\int \frac{1}{2} m v^2 e^{-\frac{m v^2}{2 K_B T}} d^3v}{\int e^{-\frac{m v^2}{2K_B T}} d^3 v} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{2} m v^4 e^{-\frac{m v^2}{2K_B T}} \operatorname{sen}\theta\, dv\, d\theta\, d\phi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{m v^2}{2K_B T}} v^2 \operatorname{sen}\theta\, dv\, d\theta\, d\phi}$$

Necesitamos calcular las integrales:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx\, dy} = \sqrt{\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-\alpha \rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta} = \sqrt{\left.\frac{e^{-\alpha\rho^2}}{-2\alpha}\right|_0^{\infty} \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$