



*Universidad de Chile*

*Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas*

*Departamento de Ingeniería Mecánica*

# **Clase Auxiliar Sistemas Dinámicos, FI21B: Ejercicios de Dinámica Lagrangeana\***

Máximo León Ganem

Noviembre de 2004.\*Sujeto a cambios de redacción y errores de cualquier  
tipo

# Índice

<b>1. Ecuaciones de Euler Lagrange para Sistemas de Partículas y Sólidos</b>	<b>2</b>
1.1. Prefacio a los Ejercicios: Un poco de Teoría . . . . .	2
1.1.1. Ejercicios . . . . .	3
<b>2. Pequeñas Oscilaciones en Torno a Equilibrios Estables</b>	<b>13</b>
2.1. Teoría... . . . .	13
2.1.1. Ejercicios . . . . .	16

# 1. Ecuaciones de Euler Lagrange para Sistemas de Partículas y Sólidos

## 1.1. Prefacio a los Ejercicios: Un poco de Teoría

Hasta ahora, según todo lo que se ha visto, los problemas se pueden resolver usando dinámica de Newton, Conservación de Energía, Ecuaciones de Euler y las de torque ( $\vec{\tau}_O = \vec{L}_O$ ) que se han enseñado y usado exhaustivamente desde FI10A.

Ahora, con todo lo que se sabe de cálculo en varias variables, ecuaciones diferenciales, y los conocimientos de mecánica que se tienen por el momento, es posible introducir una herramienta muchísimo más poderosa: La dinámica de Lagrange, específicamente, las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL), cuya demostración ya se ha obtenido en clases de cátedra, y que corresponde a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial q_i} = 0 \quad (1)$$

Con  $i = 1, \dots, n$  y  $L = T - V$ , donde  $n$  es el número de *grados de libertad* (g.l.) del sistema,  $T$  es la energía cinética,  $V$  es el potencial,  $Q_i$  son las fuerzas generalizadas, que van dentro que están incluidas en el potencial  $V$  solo cuando  $V = V(q)$ , y  $q_i$  las coordenadas (generalizadas) que se usan para describir el movimiento de los cuerpos que componen el sistema dinámico en estudio.

Los *grados de libertad* de un sistema deben entenderse como 'la posibilidad de un cuerpo de moverse sin estar sometido a restricciones, tales como las de un péndulo que debe estar siempre describiendo una circunferencia, o una bolita que baja por un alambre en forma de espiral, de una ecuación conocida'.

Los *trabajos virtuales* deben entenderse como el trabajo de fuerzas como los roces-deslizantes, viscosos, etc- que realizan cuando se 'detiene' el tiempo y se verifica que son nulos cuando los trabajos respectivos sean cero. Por ejemplo, una partícula que desliza sobre una vara girando, en efecto hay un trabajo neto que ejerce la barra sobre la partícula que es distinto de cero, pero el trabajo virtual si lo es, pues si detenemos el tiempo y movemos la partícula sobre la vara que ahora 'no se mueve', (pues estamos analizando una foto del movimiento) cuando no

hay roce deslizante, el trabajo virtual en la dirección de movimiento de la partícula sobre la vara es cero, y entonces  $Q_i = 0$  en las ecuaciones (1), dado que solo hay fuerzas conservativas que *trabajan virtualmente* en el instante dado.

### 1.1.1. Ejercicios

#### Problema 1

Considere el sistema que se muestra en la figura 1. Un tubo liso que forma un ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal, contiene 2 cuerpos de masa  $m_1$ ,  $m_2$  que se conectan mediante resortes de constantes  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ , respectivamente. El tubo está ubicado, a una distancia  $s$  del centro de la mesa, de manera que el plano que pasa por el centro del tubo también pasa por el eje de rotación de la mesa giratoria (a velocidad angular constante  $\dot{\theta} = \varpi$ ). Ésta última está ubicada sobre un ascensor que se mueve hacia arriba con aceleración  $\mathbf{a}$ . Obtenga las ecuaciones de movimiento, bajo la acción de la gravedad  $\mathbf{g}$ , en función de las coordenadas generalizadas  $q_1$  y  $q_2$ .

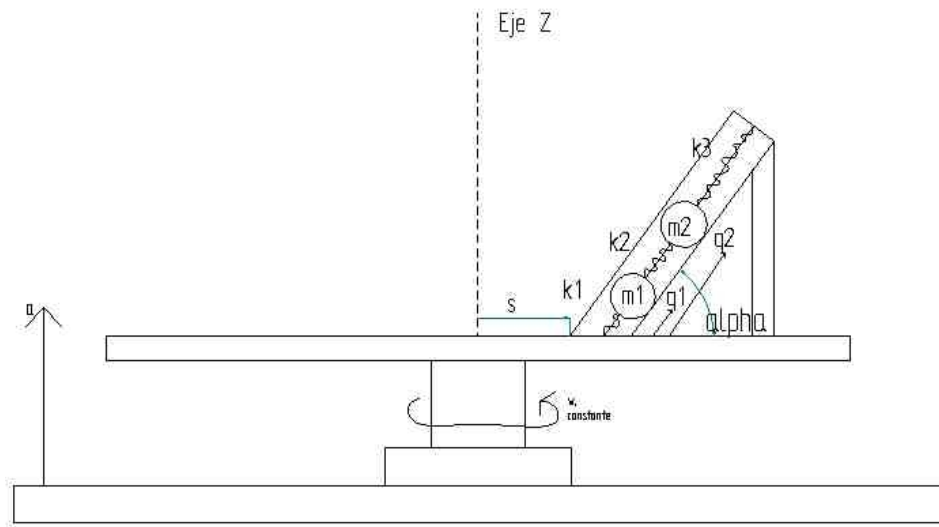


Figura 1: Problema 1

**Solución:**

Vamos a utilizar coordenadas polares expresadas en función de  $q_1$  y  $q_2$ , y luego usaremos al correspondiente energía cinética y potencial usando éstas coordenadas para determinar el Lagrangeano  $L=T-V$ , recordando que:

$$\vec{R}_i = r_i \hat{\rho} \Rightarrow v_i = \dot{r}_i \hat{\rho} + r_i \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z}_i \hat{k}$$

i=1,2. Luego:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}_2^2)$$

Donde

$$r_i = s + q_i \cos \alpha$$

$$\dot{\theta} = \varpi$$

$$z_i = q_i \sin \alpha + \frac{1}{2}at^2$$

Con i=1,2. Reemplazando:

$$T = \frac{1}{2}m_1[\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 at \sin \alpha + (s + q_1 \cos \alpha)^2 \varpi^2 + at^2] + \frac{1}{2}m_2[\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_2 at \sin \alpha + (s + q_2 \cos \alpha)^2 \varpi^2 + at^2]$$

Determinamos ahora el potencial V:

$$V = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + \frac{1}{2}k_1(q_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(q_2 - q_1 - l_2)^2 + \frac{1}{2}k_3(q_2 - l_3)^2$$

Usando las ecuaciones de (EL) para este sistema, se tiene que :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}\right) = m_i(\ddot{q}_i + a \sin \alpha) \quad i = 1, 2.$$

Notar que los trabajos virtuales no conservativos son cero. Luego:

$$\frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial q_1} = m_1 \varpi^2 (s + q_1 \cos \alpha) \cos \alpha + m_1 g \sin \alpha + k_1(q_1 - l_1) - k_2(q_2 - q_1 - l_2)$$

$$\frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial q_2} = m_2 \varpi^2 (s + q_2 \cos \alpha) \cos \alpha + m_2 g \sin \alpha - (k_2 + k_3)q_2 + k_2 q_1 + k_2 l_2 + k_3(l_1 + l_2)$$

Finalmente, por coordenada  $q_i$ , reemplazando  $z_i$  y  $r_i$ , se tiene que:

$$m_1(\ddot{q}_1 + a \sin \alpha) - m_1 \varpi^2 (s + q_1 \cos \alpha) \cos \alpha = m_1 g \sin \alpha + k_1(q_1 - l_1) - k_2(q_2 - q_1 - l_2)$$

$$m_1(\ddot{q}_1 + a \sin \alpha) - m_1 \varpi^2 (s + q_1 \cos \alpha) \cos \alpha = m_2 g \sin \alpha - (k_2 + k_3)q_2 + k_2 q_1 + k_2 l_2 + k_3(l_1 + l_2)$$

Estas son las ecuaciones de movimiento de nuestro sistema dinámico. Notar que el efecto de la aceleración  $\mathbf{a}$  es 'incrementar' la aceleración  $\mathbf{g}$ . El procedimiento para resolver problemas ha sido expuesto, y es el que en la mayoría de los casos sirve para resolver problemas con muchas partículas. La dificultad casi siempre radica en encontrar la buena expresión para  $T$ , y pocas veces es difícil calcular  $V$ , pero no quiere decir que nunca ocurra. A veces resulta mejor usar sistemas de coordenadas conocidas (polares, esféricas, cartesianas, hiperbólicas, etc.), pero como se verá en el próximo problema, el uso del campo de velocidades para movimiento relativo soluciona muchas dificultades técnicas.

## Problema 2

El eje vertical de la figura 2 se hace rotar con velocidad angular  $\varpi$  constante. La partícula de masa  $\mathbf{m}$  se puede mover libremente en el plano de las dos barras  $aa'$  y  $bb'$ , ambas de largo  $\mathbf{R}$ , separadas por una distancia  $\mathbf{s}$  constante, que rota con el eje y que pasa por su centro. Los resortes tienen constantes  $k_1$  y  $k_2$ , y el movimiento se realiza bajo la acción de la gravedad. Determine las ecuaciones de movimiento de la partícula.

## Solución:

Antes de empezar cualquier problema de este tipo siempre es bueno saber con cuantos g.l. estamos trabajando para poder enfocar debidamente el problema y plantear correctamente las ecuaciones EL. Este problema tiene 2 dos grados de libertad, pues se dice que la masa  $\mathbf{m}$  se mueve LIBREMENTE en el plano que se indica en el enunciado, mientras que la rotación  $\varpi$  no es un g.l., pues se dice que es constante y es un valor dado, luego esta es una restricción del sistema.

Llamemos a esta posición libre  $(x, y)$  medida con respecto a un sistema no inercial ubicado en extremo de la barra  $aa'$ , tal como se indica en la figura 2. Con esto claro, usaremos el campo de velocidades para movimiento relativo aprendido en FI21A:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \dot{\vec{R}}_0 + \Omega \wedge \vec{r}'$$

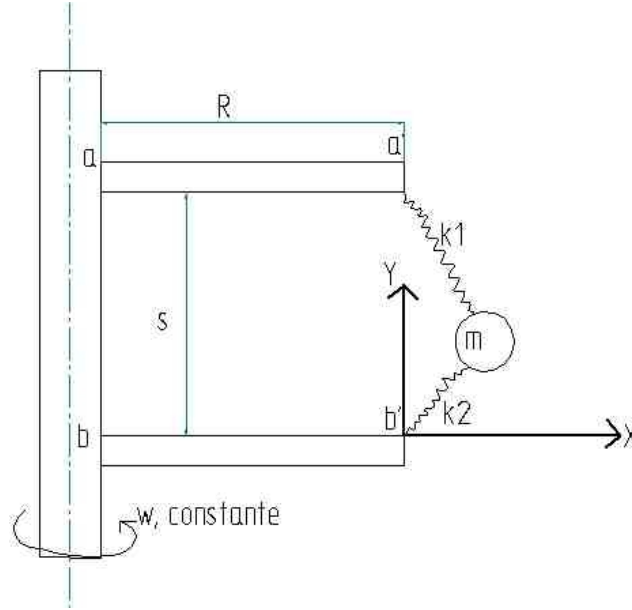


Figura 2: Problema 2

Con este campo de velocidades determinamos la energía cinética como

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

La energía potencial  $V$  se determina de manera trivial, y se calculará más adelante.

Para éste problema se usarán coordenadas **polares como sistema fijo inercial**, para describir el movimiento del origen del **sistema no inercial XYZ**, y cartesianas para el movimiento del cuerpo en este mismo sistema, y luego expresaremos cada vector en la base que se desee (siempre siendo consecuente con la notación y direcciones), en particular se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{R}_0 &= R \hat{\rho} \\ \dot{\vec{R}}_0 &= R \dot{\varpi} \hat{\theta} \\ \vec{r} &= x \hat{X} + y \hat{Y} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{x} \hat{X} + \dot{y} \hat{Y} \end{aligned}$$

Donde la derivada temporal se realiza sobre el sistema XYZ no inercial.

$$\Omega = \dot{\varpi} \hat{k}$$

Usando entonces el campo de velocidades anterior, y notando que  $\hat{\theta} \equiv \hat{Z}$  y que  $\hat{k} \equiv \hat{Y}$ , se tiene que:

$$\vec{v} = R \dot{\varpi} \hat{Z} + \dot{x} \hat{X} + \dot{y} \hat{Y} + x \dot{\varpi} \hat{Z}$$

Luego,  $L = T - V$  queda como sigue:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m[(R+x)\varpi^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2] - \left[\frac{1}{2}k_2(\sqrt{x^2 + y^2} - l_2)^2 + \frac{1}{2}k_1(\sqrt{x^2 + (s-y)^2} - l_1)^2 + mgy\right]$$

Se puede observar trivialmente a qué corresponde  $T$  y  $V$  en la ecuación anterior. Ahora determinaremos las ecuaciones de movimiento, usando EL:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= m[(R+x)\varpi^2 - k_2(\sqrt{x^2 + y^2} - l_2)\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - k_1(\sqrt{x^2 + (s-y)^2} - l_1)\frac{x}{\sqrt{x^2 + (s-y)^2}}] \\ &= m[(R+x)\varpi^2 - (k_1+k_2)x + \frac{xk_1l_1}{\sqrt{x^2 + (s-y)^2}} + \frac{xk_2l_2}{\sqrt{x^2 + y^2}}]\end{aligned}$$

De la misma manera, se obtiene que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = mg + (k_1+k_2)y - k_1s\frac{(s-y)k_1l_1}{\sqrt{x^2 + (s-y)^2}} - \frac{yk_2l_2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= m[(R+x)\varpi^2 - (k_1+k_2)x + \frac{xk_1l_1}{\sqrt{x^2 + (s-y)^2}} + \frac{xk_2l_2}{\sqrt{x^2 + y^2}}] \\ m\ddot{y} &= mg + (k_1+k_2)y - k_1s\frac{(s-y)k_1l_1}{\sqrt{x^2 + (s-y)^2}} - \frac{yk_2l_2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado el campo de velocidades para obtener la energía cinética. La energía potencial debe ser determinada en el mismo sistema (fijo o inercial) en que se determino la energía cinética. Esto es, ambas  $T$  y  $V$  deben quedar calculadas usando sistemas inerciales. Para el caso de los resortes, la energía es la misma calculada tanto en sistemas inerciales como no inerciales (la energía de un resorte es la medida de la energía contenida en la compresión o expansión de éste).



A continuación se estudiará un problema que incluye un sólido más una partícula, para utilizar el resultado general de la energía cinética que se compone de energía de rotación y traslación del sólido:

$$T = \sum_{i,j=1}^n q_i \Gamma_{ij} q_j = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \Upsilon_G \vec{\omega}$$

Donde el coeficiente  $\Gamma$  representa una unidad de masa (una masa, un momento de inercia según corresponda),  $n$  es el número de g.l,  $\vec{\omega}$  es el vector velocidad angular,  $v_G$  es la velocidad de traslación del centro de masa del sólido y  $\Upsilon_G$  es el tensor de inercia medido desde el centro de gravedad  $G$  de éste, calculado en la manera usual. Más generalmente, se calcula respecto del origen del sistema no inercial que se elija, siendo éste último en la mayoría de las veces el centro de masa del sólido, pues facilita muchos cálculos.

El resultado que le sigue a esta última ecuación, descompone la energía de traslación del centro de masa del sólido más la rotación entorno a éste. Trabajaremos siempre en el sistema de ejes principales de inercia para obtener el vector de velocidad angular  $\vec{\omega}$  y para obtener la velocidad del centro de masa  $G$ , usaremos el campo de velocidades expuesto en el ejercicio anterior.

Esta manera de resolver problemas resulta ser la más mecánica y fácil de realizar. Sirve para un número finito de problemas (en realidad muy pequeño. Por ejemplo, usar esta estrategia sería muy ineficiente si se quiere determinar la energía de un brazo robot de más de 3 grados de libertad), pero muy útil para este nivel, en el 99 por ciento de los casos.

### Problema 3

El disco  $D$  de en la figura 3, puede girar con velocidad angular  $\dot{\phi}$  con respecto a su eje, que forma un ángulo  $\theta$  constante con respecto a la horizontal. Al mismo tiempo el marco en el que está girando rota con velocidad  $\dot{\psi}$  con respecto a su eje vertical (ver figura 3). Encuentre la velocidad angular  $\vec{\omega}$  del sólido, y con esto determine la ecuación de movimiento del sistema dinámico.

### Solución:

Para encontrar  $\vec{\omega}$ , debemos ubicar el sistema no inercial en los ejes principales del disco, y

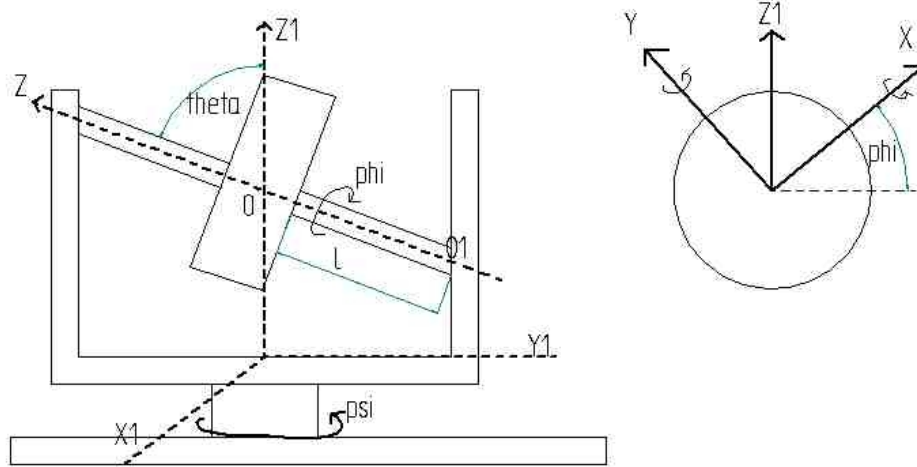


Figura 3: Problema 3

proyectar la velocidad angular en este sistema. Llamando  $X_1Y_1Z_1$  al sistema fijo,  $XYZ$  al no inercial con origen en el centro de masas  $G$  y con la orientación de los ejes principales del disco  $D$ . Escribamos entonces la expresión general de la velocidad angular:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{Z} + \dot{\psi}\hat{Z}_1$$

Lo único que resta hacer ahora es expresar los vectores que no corresponden a los ejes principales de inercia sobre éstos. En este caso, hay que proyectar  $Z_1$  sobre el sistema no inercial  $XYZ$ , solidario al disco  $D$ . Luego:

$$Z_1 = \hat{X}\sin\theta\sin\phi + \hat{Y}\sin\theta\cos\phi + \hat{Z}\cos\theta$$

Luego,

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\hat{X}\sin\theta\sin\phi + \dot{\psi}\hat{Y}\sin\theta\cos\phi + (\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\hat{Z}$$

Con esto, y notando que  $V=0$ , se llega fácilmente a que:

$$L = T = \frac{1}{2}I_x\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}I_z(\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2$$

La determinación de las ecuaciones de movimiento se dejan propuestas.

Ahora por razones pedagógicas, tomemos el origen del sistema no inercial en el extremo del eje, que sostiene al disco D y que esta ubicado a una distancia  $l$  de su centro de masa G, manteniendo la orientación anterior.

Si ahora nos colocamos con origen en  $O_1$ , el centro de masas se traslada, y por lo tanto debemos encontrar la energía asociada a éste cambio.

Usando el campo de velocidades,

$$\vec{v} = \vec{v}' + \dot{\vec{R}}_0 + \Omega \wedge \vec{r}'$$

Tenemos que

$$\vec{R}_0 = l \sin \theta \hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{R}}_0 = l \sin \theta \dot{\psi} \hat{\psi}$$

$$\Omega = \dot{\psi} \hat{Z}_1$$

$$\vec{r}' = l \hat{Z} \Rightarrow \dot{\vec{r}}' = \vec{0}$$

Con esto, y notando que dado que el disco es simétrico, podemos establecer que  $\hat{\psi} \equiv -\hat{Y}$ , con  $\hat{Y}$  el vector unitario del sistema XYZ perpendicular a la hoja, saliendo de ésta; Entonces tenemos que,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{0} - l \sin \theta \dot{\psi} \hat{Y} + \dot{\psi} \hat{Z}_1 \wedge l \hat{Z} \\ &= -l \sin \theta \dot{\psi} \hat{Y} + l \sin \theta \dot{\psi} \hat{Y} = \vec{0} \end{aligned}$$

La velocidad angular del disco es,

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{X} \sin \theta \sin \phi + \dot{\psi} \hat{Y} \sin \theta \cos \phi + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \hat{Z}$$

Luego se obtiene la misma expresión para la energía cinética calculada anteriormente, con la diferencia de que  $I_{x,O_1}$  se calcula con respecto al nuevo origen  $O_1$ .

$$L = T = \frac{1}{2} I_{x,O_1} \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} I_z (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2$$

No importa que origen o que dirección tenga el triedro del sistema no inercial que se elija. Sin embargo, hay puntos mas aventajados que otros para describir el movimiento de un sistema

dado, usando (EL).

#### Problema 4

Un trompo simétrico con momentos de inercia con  $I_1$ ,  $I_3$ , de masa  $M$  y centro de gravedad ubicado a una distancia  $l$  desde la púa de éste, se coloca en movimiento con su eje inclinado en un ángulo  $\theta_0 = \pi/2$ , con un spin  $\dot{\psi} = s$  y precesión inicial  $\dot{\phi}(0) = \Omega$  solamente. Determine la condición para que el movimiento  $\theta_0$  no varíe.



Figura 4: Problema 4

#### Solución:

El lagrangeano de un trompo es  $L = T - V$ . Dado que la velocidad angular del sólido es:

$$\vec{\omega} = \hat{e}_1(\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi) + \hat{e}_2(\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi) + \hat{e}_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$$

Por lo tanto el lagrangeano queda, ordenando los términos y trasladando el eje principal de inercia al origen, donde esta la púa del trompo:

$$L = \frac{I'_1}{2}(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - Mgl\cos\theta$$

Hay que notar que  $L = L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ , por lo que se cumplirá que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \equiv P_\psi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$$

y que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \equiv P_{\phi} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + P_{\psi} \cos \theta$$

Las cantidades  $P_{\psi}$  y  $P_{\phi}$  son constantes (se conservan) y son los llamados Momentos Generalizados. Con éstas cantidades podemos eliminar una de las variables  $\dot{\psi}$  y  $\dot{\phi}$  en el lagrangeano.

Para encontrar la condición pedida, usaremos que la energía se conserva, cuando no hay fuerzas no conservativas y el resultado obtenido anteriormente:

$$E = \frac{I_1'}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(P_{\phi} - P_{\psi} \cos \theta)^2}{2I_1' \sin^2 \theta} + \frac{P_{\psi}^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta.$$

Ahora , tenemos que la energía depende solo de  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ , y que el potencial efectivo asociado  $U$  es

$$U(\theta) = \frac{(P_{\phi} - P_{\psi} \cos \theta)^2}{2I_1' \sin^2 \theta} + \frac{P_{\psi}^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta.$$

Para que dado un  $\theta_0$  sea constante (mínimo relativo tal que no hay nutación) y estable, debe cumplirse que

$$\frac{\partial U(\theta_0)}{\partial \theta} = 0 \quad (I)$$

$$\frac{\partial^2 U(\theta_0)}{\partial \theta^2} > 0 \quad (II)$$

Para este problema, trivialmente se puede observar que  $P_{\psi} = I_3 s$  y que  $P_{\phi} = I_1' \Omega$ . Luego,

$$U = \frac{(I_1' \Omega - I_3 s \cdot \cos \theta)^2}{2I_1' \sin^2 \theta} + \frac{(I_3 s)^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta.$$

Derivando una vez  $U$ , se tiene obtiene la condición para que  $\theta = \pi/2$  sea un mínimo, si además queremos que éste sea estable (no haya nutación) entonces debemos aplicar la condición (II).

Luego, usando (I) y definiendo  $u = \cos \theta$ , se tiene

$$\frac{\partial U(u=0)}{\partial u} = Mgl - I_3 \Omega s = 0 \quad (Equilibrio)$$

Es decir,

$$\Omega = \frac{Mgl}{I_3 s}$$

y usando (II), se verifica que para que  $u=0$  ( $\theta = \pi/2$ ) sea un equilibrio estable, debe cumplirse que,

$$\frac{\partial^2 U(u=0)}{\partial u^2} = \frac{(I_3 s)^2}{I_1'} + I_1' \Omega^2 > 0$$

Que siempre se cumple dado que todos los factores en la última ecuación son siempre positivos.

Aquí hemos utilizado el concepto conservación de energía y métodos usados en mecánica (FI21A) para obtener equilibrios. El reemplazo  $u=\cos\theta$ , fue útil en los cálculos en el momento de derivar, y de esa manera, realizar un análisis mas rápido.

Queda propuesto obtener las ecuaciones de movimiento para éste trompo, y obtener el mismo resultado anterior, para el mismo enunciado expuesto al inicio de éste problema.

## 2. Pequeñas Oscilaciones en Torno a Equilibrios Estables

### 2.1. Teoría...

Hasta ahora hemos analizado movimientos generales de partículas y solidos usando EL. Ahora nos interesa conocer los 'pequeños' movimientos que realizan los objetos cuando los perturbamos ligeramente de su estado de equilibrio (donde la energía potencial efectiva es un mínimo, tal como se demostró en el curso anterior). Usaremos el mismo concepto para obtener los puntos de equilibrio de un sistema dinámico dado el sistema de referencia que usamos. Primero partiremos con obtener las ecuaciones de movimiento, usando EL. Luego, encontraremos los puntos de equilibrio ya sea derivando el potencial efectivo del sistema, o bien, igualando a cero todas las derivadas de las coordenadas generalizadas (i.e. el cuerpo no se mueve). Una vez hecho esto, usaremos en la mayoría de los casos un "cambio astuto de variables", que permitan escribir las ecuaciones de movimiento en forma matricial. El cambio de variables típico es

$$X_i = X_{i,0} + \delta_i$$

Donde  $X_i$  representa la coordenada generalizada  $i$  que estamos usando,  $X_{i,0}$  es el punto de equilibrio del sistema, que en el caso mas trivial siempre es cero;  $\delta_i$  es una perturbación pequeña, esto es, que se puede considerar como una variable que no varia mucho. Hay que

notar que las derivadas de la perturbación y de la coordenada generalizada y son iguales. Otra suposición que haremos es que

$$\frac{d^k \delta_i}{dt^k} \cdot \frac{d^l \delta_j}{dt^l} \approx 0 \quad \forall i, j$$

Donde  $k, l = 0, 1, 2$ , según lo que tengamos. Una vez que hacemos estas suposiciones escribiremos las ecuaciones de movimiento como sigue:

$$A\ddot{\vec{\delta}} + K\vec{\delta} = 0$$

Donde  $A$  es una matriz diagonal,  $K$  es simétrica y  $\vec{\delta}$  es nuestro vector de pequeñas oscilaciones. Las ecuaciones anteriores son las que describen el movimiento para pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio. Para resolverla, asumimos el típico comportamiento de oscilador armónico de un sistema con las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones, planteada anteriormente. Sea entonces:

$$\vec{\delta} = \begin{bmatrix} z_i e^{\mathbf{i}\varpi t} \\ z_j e^{\mathbf{i}\varpi t} \end{bmatrix}$$

Este vector es derivable en el espacio complejo. Al derivarlo 2 veces obtenemos

$$\ddot{\vec{\delta}} = -\varpi^2 \begin{bmatrix} z_i e^{\mathbf{i}\varpi t} \\ z_j e^{\mathbf{i}\varpi t} \end{bmatrix}$$

Al reemplazar, obtenemos

$$(-A\varpi^2 + K) \begin{bmatrix} z_i \\ z_j \end{bmatrix} = 0$$

Donde  $\varpi^2$  son las frecuencias de los modos de oscilación  $z_i$ . Es importante notar que hay tantos modos de oscilación como g.l. tiene el sistema.

Para obtener  $\varpi^2$  calculamos

$$\det[-A\varpi^2 + K] = 0$$

Con esta última ecuación, obtenemos un polinomio cuyo grado es igual al número de g.l. . Al reemplazar los valores de  $\varpi_i$  en la ecuación para pequeñas oscilaciones, obtenemos los modos de oscilación  $z_i$ , que nos indican cómo se mueve el sistema cuando alcanza una frecuencia

angular de valor  $\varpi_i$ .

Más formalmente, y usando la conocida expresión para la expansión de Taylor en varias variables, lo que estamos haciendo es:

Tenemos  $L = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i)$ . Para encontrar los modos y frecuencias de pequeñas oscilaciones, expandimos  $T$  y  $V$  hasta segundo orden. Es decir, escribimos, usando que  $q_i = q_{i,0} + \delta_i$  y notando con subíndice cero la evaluación de las derivadas en el punto de equilibrio respectivo:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \dots \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{\delta}_i \dot{\delta}_j + \dots \end{aligned}$$

donde

$$m_{ij}(q_i) = m_{ij}(q_{i,0}) + \sum_k \left( \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 \delta_k + \dots$$

Además,

$$V = V(q_{i,0}) + \sum_r \left( \frac{\partial V}{\partial \delta_r} \right)_0 \delta_r + \sum_{r,l} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_l} \right)_0 \delta_r \delta_l + \dots$$

El segundo término es cero. Luego como el primero es una constante y no influye cuando determinamos las ecuaciones de movimiento, lo podemos ignorar, de manera que solo debemos encontrar

$$V = \sum_{r,l} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_l} \right)_0 \delta_r \delta_l$$

El lagrangeano queda entonces:

$$L = T - V \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{\delta}_i \dot{\delta}_j - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \delta_i \delta_j)$$

Luego las ecuaciones de movimiento, usando EL quedan:

$$\sum_j m_{ij} \ddot{\delta}_j + \sum_{r,j} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_j} \right)_0 \delta_j = 0$$

Cuya solución tiene la forma

$$\delta_j = z_j e^{\mathbf{i}\varpi t}$$



Hay que notar que para que los valores de  $\varpi$  no sean complejos, el término  $(\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_j})_0 > 0$ , que implica que el equilibrio debe ser estable.

Al reemplazar, se obtiene, en forma matricial el mismo resultado expuesto anteriormente, es decir

$$\det[-A\varpi^2 + K] = 0$$

Cualquiera de los métodos enunciados anteriormente es válido. Será la práctica la que indicará cual es mejor para un problema dado.

### 2.1.1. Ejercicios

#### Problema 5

El marco de la figura 5, de momento de inercia  $I_1$ , se encuentra empotrado como se muestra, y se pone a girar con una velocidad desconocida  $\dot{\theta}_1$ . El disco D, de momentos de inercia principales  $I_x=I_y$ ,  $I_z$  y masa  $M$  se mantiene fijo en el marco y rota con una velocidad angular  $\dot{\theta}_2$ . Los ejes del marco y disco, tienen conectados resortes de torsión de constantes elásticas  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente. El eje del disco esta inclinado en un ángulo  $\alpha$ , puesto de manera que el centro de masa esta en una excéntrica de tamaño  $s$ , respecto del eje de rotación del marco (ver figura 5). Muestre que las frecuencias para el movimiento de pequeñas oscilaciones de los modos de  $\theta_1$  y  $\theta_2$  vienen dados por:

$$\varpi^2 = \frac{Ik_2 + I_zk_1 \pm \sqrt{(Ik_2 + I_zk_1)^2 - 4k_1k_2(I_1 + Ms^2 + I_x\cos^2\alpha)I_z}}{2I_z(I_1 + Ms^2 + I_x\cos^2\alpha)}$$

Donde

$$I = I_1 + Ms^2 + I_x\cos^2\alpha + I_z\sin^2\alpha$$

#### Solución:

Antes que todo, un resorte de torsión de constante elástica  $k$ , es un resorte que guarda energía al estar sometido a torsión, valga la redundancia, de manera que la energía del resorte es

$$E_{resorte} = \frac{1}{2}k(\theta - \theta_0)^2$$

Donde  $\theta$  es el ángulo con respecto al ángulo de equilibrio  $\theta_0$ , el resorte se hace girar.

Con esto claro, nos arrojamamos a resolver el problema.

Como antes, estamos trabajando con un sólido, por lo que debemos determinar la energía cinética en dos partes: la energía de rotación  $T_r$  y la de traslación del centro de masa  $T_t$ . Antes, colocamos el sistema fijo polar  $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z})$  en la base del marco (no del eje, para no confundirse) y el móvil, no inercial  $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$  fijo al centro de masa del disco D, pero que no rota con el, usando el hecho de que D es simétrico.

El sólido esta compuesto por el marco y el disco D. Luego, como

$$\dot{\vec{\rho}} = s\dot{\theta}_1\hat{\theta}$$

Se tendrá que

$$T_t = \frac{1}{2}Ms^2\dot{\theta}_1^2$$

La energía de rotación en su forma general es

$$T_r = \frac{1}{2}(I_x\varpi_x^2 + I_y\varpi_y^2 + I_z\varpi_z^2 + I_1\dot{\theta}_1^2)$$

Por lo que debemos determinar el valor de  $\vec{\Omega} = (\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z)$ . Para ello debemos calcular la velocidad angular del sólido  $\vec{\Omega}$ , que a grosso modo es

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}_1\hat{z} + \dot{\theta}_2\hat{z}'$$

Luego, debemos proyectar los vectores de la base inercial en la base no inercial de los ejes principales que, como antes, coinciden con el sistema  $\hat{x}'\hat{y}'\hat{z}'$  que colocamos en D. Así,

$$\hat{z} = \hat{z}'\sin\alpha - \hat{x}'\cos\alpha$$

De ésta manera,

$$T_r = \frac{1}{2}I_x\dot{\theta}_1^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}I_z(\dot{\theta}_1\sin\alpha + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}(I_1 + Ms^2)\dot{\theta}_1^2$$

El potencial esta dado por el de los resortes de torsión y despreciamos la energía potencial (suponiendo que la altura es despreciable) con respecto a la energía que aportan los resortes.

Luego,

$$V = \frac{1}{2}k_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_2\theta_2^2$$

El lagrangeano queda entonces como

$$L = T_t + T_r - V = \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2(I_1 + Ms^2 + I_x \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha) + I_z \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \alpha + \frac{1}{2}I_z \dot{\theta}_2^2 - \left[\frac{1}{2}k_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2}k_2 \theta_2^2\right]$$

Usando EL, obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$I\ddot{\theta}_1 + I_z \ddot{\theta}_2 \sin \alpha + k_1 \theta_1 = 0$$

$$I_z \ddot{\theta}_2 + I_z \ddot{\theta}_1 \sin \alpha + k_2 \theta_2 = 0$$

Donde  $I = I_1 + Ms^2 + I_x \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha$ .

Las ecuaciones anteriores, podemos escribirlas en forma matricial:

$$A\ddot{\vec{\theta}} + K\vec{\theta} = 0$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} I & I_z \sin \alpha \\ I_z \sin \alpha & I_z \end{bmatrix}$$

y

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

Sea entonces

$$\vec{\theta} = \begin{bmatrix} z_1 e^{\mathbf{i}\varpi t} \\ z_2 e^{\mathbf{i}\varpi t} \end{bmatrix}$$

Reemplazando y derivando donde corresponda, llegamos a que  $z_1$  y  $z_2$ , las amplitudes de los modos de oscilación, son tales que:

$$\begin{bmatrix} -\varpi^2 I + k_1 & -\varpi^2 I_z \sin \alpha \\ -\varpi^2 I_z \sin \alpha & -\varpi^2 I_z + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0$$

Por lo que debemos calcular

$$\det \left( \begin{bmatrix} -\varpi^2 I + k_1 & -\varpi^2 I_z \sin \alpha \\ -\varpi^2 I_z \sin \alpha & -\varpi^2 I_z + k_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

El cálculo de este determinante da como resultado

$$(-\varpi^2 I + k_1)(-\varpi^2 I_z + k_2) = \varpi^4 I_z^2 \sin^2 \alpha$$

Desarrollando los términos, llegamos a la siguiente ecuación cuadrática para  $\varpi^2$ :

$$\varpi^4(Ms^2 + I_1 + I_x \cos^2 \alpha)I_z - \varpi^2(Ik_2 + I_z k_1) + k_1 k_2 = 0$$

Que (finalmente!!) da como resultado:

$$\varpi^2 = \frac{Ik_2 + I_z k_1 \pm \sqrt{(Ik_2 + I_z k_1)^2 - 4k_1 k_2 (I_1 + Ms^2 + I_x \cos^2 \alpha)I_z}}{2I_z(I_1 + Ms^2 + I_x \cos^2 \alpha)} \sqrt{\quad}$$

Donde

$$I = I_1 + Ms^2 + I_x \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha$$

Aquí usamos el primer método que se enunció para encontrar las frecuencias de pequeñas oscilaciones, dada las características del problema, que suele ser así en la mayoría de los casos. Sin embargo, el método más formal nunca falla, mientras que éste método sirve para problemas con pocos grados de libertad y equilibrios nulos, es decir, que el valor de las coordenadas generalizadas valen cero en el equilibrio estático del sistema. El caso de equilibrios dinámicos o relativos se analiza, usando la función de Routh (parecida al Hamiltoniano), pero que solo se ve con algunos profesores del ramo.

## Problema 6

Las masas  $m_1$  y  $m_2$  de la figura 6 se mueven sobre planos sin roce. Las dos ruedas largas de radio  $r$  e inercia  $I$  están unidas mediante una varilla que les permite girar sin resbalar en torno a sus respectivos ejes con velocidad  $\dot{\theta}$ . La masa  $m_2$  esta compuesta de las dos ruedas y la varilla. Además, este sistema esta unido, mediante un resorte de constante  $k$  y longitud natural despreciable, a una masa  $m_3$  que también desliza sin roce sobre el suelo. Muestre que el sistema tiene solo una frecuencia natural.

## Solución

Los grados de libertad del sistema son 3:  $x_1, q_2$  y  $x_3$ . Notar que  $\dot{q}_2 = \dot{\theta}r$ , pues las ruedas giran a la misma velocidad, i.e no resbalan del plano, y donde  $q_2 = x_2$  es la posición del centro de masas de las ruedas con la varilla que las une.

Partimos, entonces, escribiendo las expresiones para el potencial  $V$  y la energía cinética  $T$ . Luego:

$$V = \frac{1}{2}k(x_3 - (x_1 - q_2))^2 + cte = \frac{1}{2}k(x_1^2 + q_2^2 x_3^2 - 2x_1 x_3 + 2q_2 x_3 - 2x_1 x_2) + cte.$$

Ahora debemos encontrar las expresiones para la velocidad de todos los componentes del sistema dinámico para poder escribir la energía cinética  $T$ . Usamos un sistema fijo en la esquina izquierda de la figura 6 y un sistema no inercial en la esquina del carrito de masa  $m_1$ , de manera que la velocidad del centro de gravedad del conjunto de masa  $m_2$  es :

$$v_{m_2} = \dot{x}_1 - \dot{q}_2$$

La velocidad de rotación de cada rueda es  $\frac{\dot{x}_2}{r}$ . Luego la energía cinética total, sumando la de la masa  $m_3$  es

$$T = \frac{1}{2}[(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + (m_2 + 2\frac{I}{r^2})\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2 - 2m_2\dot{x}_1\dot{q}_2]$$

Usando E-L, encontramos las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2\ddot{q}_2 = -k(x_1 - q_2 - x_3)$$

$$(m_2 + 2\frac{I}{r^2})\ddot{x}_2 + m_2\ddot{x}_2 = -k(q_2 - x_1 - x_3)$$

$$m_3\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_1 + q_2)$$

Ahora debemos calcular el determinante

$$\det[-A\varpi^2 + k \cdot K] = 0$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) & -m_2 & 0 \\ -m_2 & (m_2 + 2\frac{I}{r^2}) & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

y

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Notar la simetría de A y K, lo que nos dice que estamos bien encaminados.

El resultado del determinante (cálculo queda propuesto) es:

$$m_3[m_1m_2 + 2(m_1 + m_2)\frac{I}{r^2}]\varpi^2 = k[m_1m_2 + m_1m_3 + 2(m_1 + m_2 - m_3)\frac{I}{r^2}]$$

Donde las otras dos frecuencias son cero.

Queda propuesto obtener los modos normales de oscilación y la interpretación de éstos.