Capítulo 1

Sistema de Partículas.

1.1. Ecuaciones de movimiento.

Esta parte de la Mecánica, se presenta en forma bastante resumida. Se presentan las principales definiciones y relaciones cinemáticas así como las ecuaciones clásicas de movimiento para un sistema de partículas puntuales suponiendo interacciones que cumplan el principio de acción y reacción. Las definiciones de cantidades Físicas cinemáticas, que involucran las masas, las posiciones, las velocidades, tales como la energía cinética, momentum lineal, momentum angular, son naturalmente relativas al sistema de referencia que se escoja. Entre esos diversos sistemas de referencia, las relaciones que existan entre esas cantidades físicas, se desprenderán de las transformaciones de Galileo para sistemas, vea figura (1.1), que se trasladan unos respecto de otros con velocidad constante $\vec{v}$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t.$$

Más en general para sistemas de referencia arbitrarios, admitiendo aceleraciones y rotaciones de ellos respecto a uno supuesto fijo, las relaciones entre velocidades y aceleraciones de partículas son más complicadas. Podemos adelantar que las relaciones entre velocidades y aceleraciones son

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{v}^{\,rel},$$

$$\vec{a} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^{\,rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \vec{a}^{\,rel},$$

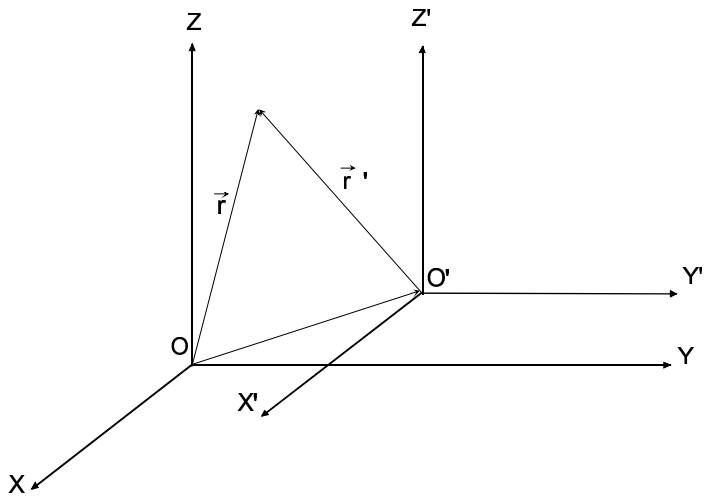

Figura 1.1: Transformación de Galileo

siendo $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$. Debe notarse que la velocidad y aceleración relativas son las derivadas de los vectores posición y velocidad relativos manteniendo fijas las direcciones de los ejes móviles, lo cual en algunos textos se indica por

$$\vec{v}^{\,rel} = \frac{\partial \vec{r}\,'}{\partial t}, \qquad \vec{a}^{\,rel} = \frac{\partial \vec{v}^{\,rel}}{\partial t}.$$

1.1.1. Sistema Inercial de referencia.

En la formulación de la dinámica clásica, se supone la existencia de al menos un sistema privilegiado de referencia, un *Sistema inercial de referencia.* Por definición, un *sistema inercial de referencia* es aquel (hipotético) sistema relativo al cual una partícula libre tiene velocidad constante o en particular nula (vea página 5 de referencia [6]) . Como consecuencia de la transformación de Galileo, todo sistema que se traslade con velocidad constante respecto a uno inercial de referencia, es también sistema inercial de referencia. La existencia de uno por lo menos, sería materia de validación experimental, con las obvias dificultades que ello presenta. Se acepta que al menos aproximadamente, el marco de las estrellas fijas, lo es. Esta es una materia hoy en día de acuerdo internacional. En efecto en Agosto de 1997, la Unión Astronómica Internacional (IAU) decidió que a partir del primero de Enero de 1998, el IAU sistema de referencia celestial sea el sistema (ICRS), en reemplazo

del sistema FK5. Hay abundantes referencias en la WEB, por ejemplo en http://hpiers.obspm.fr/webiers/general/syframes/icrsf/ICRS.html.

Definiciones y notación

Respecto a un determinado sistema de referencia, ver fig.(1.2) (no necesariamente inercial), sean

$\vec{r}_i$	los vectores posición de las N partículas
m_i	las masas de la partículas
$\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt$	la velocidad de la partícula i.
$\vec{a}_i = d\vec{v}_i/dt$	la aceleración de la partícula i.
$\vec{F}_i$	la fuerza que actúa sobre la partícula i producida por agentes exteriores al sistema.
$\vec{f}_{ij}$	la fuerza que la partícula j ejerce sobre la partícula i.
$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$	el momentum lineal o cantidad de movimiento lineal del sistema.
$\vec{L}_O = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$	el momentum angular o cantidad de movimiento angular del sistema respecto al origen O.
$\vec{r}_G = \sum m_i \vec{r}_i / M$.	la posición del centro de masas del sistema.
$M = \sum m_i$	masa total del sistema
$\vec{F}^{ext}$	la fuerza externa resultante.
$\vec{\Gamma}_O^{ext}$	el torque o momento de las fuerzas externas resultante, respecto al origen O.

En este resumen no se pretende discutir los fundamentos de la formulación Newtoniana, cuya mayor dificultad radica en las definiciones (independientes) de *Fuerza, masa y aceleración*, así como en los conceptos de espacio y tiempo, que supondremos materias conocidas.

1.1.2. Ecuaciones de movimiento.

Con respecto a un sistema inercial de referencia, cada una de las N partículas cumple con la llamada segunda ley de *Newton*

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}. \tag{1.1}$$

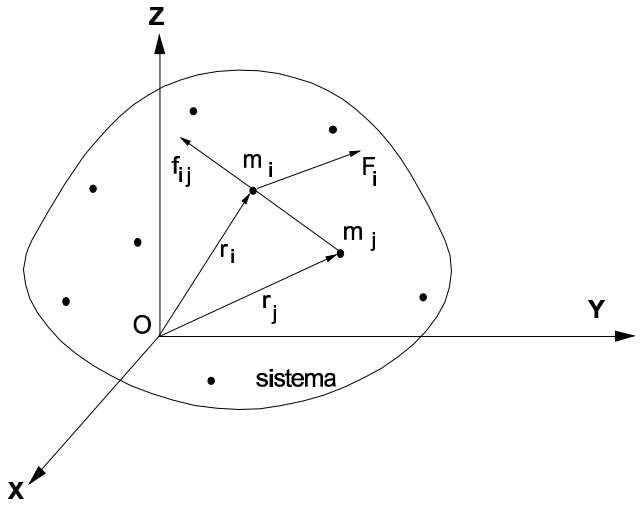

Figura 1.2: Sistema de partículas

Si las fuerzas de interacción $\vec{f_{ij}}$ satisfacen la llamada ley de acción y reacción, es decir

$$\vec{f_{ij}} + \vec{f_{ji}} = 0, \qquad \text{y} \qquad \vec{f_{ij}} \times (\vec{r_i} - \vec{r_j}) = 0,$$

puede demostrarse a partir de las N ecuaciones de movimiento, las siguientes dos importantes ecuaciones

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}, \tag{1.2}$$

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{\Gamma}_O^{ext}. \tag{1.3}$$

La primera de ellas es bastante evidente. Para demostrar la segunda, basta considerar que

$$\sum_{j \neq i} \sum \vec{r_i} \times \vec{f_{ij}} = \sum_{j \neq i} \sum \vec{r_j} \times \vec{f_{ji}} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum (\vec{r_i} - \vec{r_j}) \times \vec{f_{ij}} = 0.$$

Las ecuaciones (1.2) y (1.3) son, en general, insuficientes para determinar las posiciones de las partículas siendo la excepción más notable un sistema rígido de partículas, que tiene justamente 6 grados de libertad, o en otras palabras, que su posición puede especificarse con solo 6 coordenadas o parámetros. La segunda de las ecuaciones anteriores, toma la misma forma en un sistema

especial, no necesariamente inercial, con origen en el centro de masas G y tal que sus ejes no roten. Es decir, puede probarse que

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{ext}. \tag{1.4}$$

Entre el sistema inercial y ese otro mencionado con origen en G, pueden demostrarse las siguientes relaciones (relaciones de Koenig), consecuencias simples de la transformación de *Galileo*

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= M\vec{r}_G \times \vec{v}_G + \vec{L}_G \\ K &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + K_G \end{aligned}$$

siendo K_G y $\vec{L}_G$ la energía cinética y momentum angular relativos al sistema con origen en G.

EJERCICIO 1.1.1 *En general, si se considera otro sistema con origen en un punto A, cuyos ejes no roten, demuestre que*

$$\vec{L}_O = M\vec{r}_A \times \vec{v}_G + M\overrightarrow{AG} \times \vec{v}_A + \vec{L}_A$$

y

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\overrightarrow{AG} \times \vec{a}_A, \tag{1.5}$$

de modo que, la relación entre derivada del momentum angular y torque, es válida para puntos (A) que cumplan una de las siguientes condiciones:

$$A = G, \qquad \vec{a}_A = 0, \qquad \vec{a}_A \text{ paralela a } \overrightarrow{AG}.$$

EJERCICIO 1.1.2 *Discuta la posible aplicación del tercer caso ($\vec{a}$ paralela a $\overrightarrow{AG}$), cuando se trata de un cuerpo rígido que rueda sin deslizar, considerando el punto A como el punto de contacto. Es un error común considerar como argumento para el uso de lo anterior que dicho punto tiene velocidad instantánea cero, pues en general tiene aceleración no nula.*

1.1.3. Teorema Energía Trabajo.

De las ecuaciones de movimiento es posible escribir una primera integral de ellas en la forma que sigue, donde, sin perder generalidad, se separan las

fuerzas externas en sus posibles partes conservativa y no conservativa. Además se supone que las fuerzas de interacción son derivables de un potencial de interacción dependiente de la distancia entre las dos partículas y posiblemente de parámetros propios de ellas dos (masas, cargas, etc.). En el caso de un sistema rígido de partículas, la última suposición no es necesaria, por cuanto el trabajo que realizan las fuerzas de interacción es nulo, al mantenerse constantes las distancias entre partículas. Este teorema es

$$\Delta(K + V + V^{int}) = W^{nc}_{1\to 2}, \tag{1.6}$$

donde el trabajo no conservativo (nc) externo (ext) es la integral de línea

$$W^{nc}_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}^{ext,nc} \cdot d\vec{r},$$

V es la energía potencial asociada a la posible parte conservativa de la fuerza externa y V^{int} la energía potencial de interacción. Si el lado derecho, el trabajo realizado por la posible parte no conservativa de la fuerza exterior es cero, entonces se conserva la energía mecánica total del sistema. En el caso importante de un sistema rígido de partículas, al no variar las distancias entre las partículas, puede tomarse $V^{int} = 0$.

EJERCICIO 1.1.3 *Demuestre que la suma de los trabajos internos es cero si las distancias entre las partículas son invariables.*

EJERCICIO 1.1.4 *Demuestre el teorema 1.6.*

1.1.4. Sistema de dos partículas.

El problema definido por el conjunto de ecuaciones (1.1), es en general no solucionable analíticamente, si $N \geq 3$. La principal dificultad consiste en la imposibilidad de separar variables. El sistema de dos partículas interactuando a través de una fuerza conservativa es un caso soluble de sistemas de partículas. Tomando en cuenta la validez del principio de acción y reacción, las dos ecuaciones para ese caso son

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{f}(\vec{r_1} - \vec{r_2})$$
$$m_2\vec{a}_2 = -\vec{f}(\vec{r_1} - \vec{r_2}).$$

Esas ecuaciones son fácilmente desacoplables utilizando como nuevas variables las posición del centro de masa $\vec{r}_G$ y la posición relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ resultando

$$M\vec{a}_G = 0,$$
$$\mu\vec{a} = \vec{f}(\vec{r}),$$

siendo μ la masa reducida del sistema de dos partículas, es decir

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Entonces, el problema se ha reducido a resolver el problema de una partícula de masa reducida μ en presencia de una fuerza central, con centro de fuerza en una de las partículas. Este resultado es sorprendentemente simple considerando que el origen (la posición de una de las partículas) está acelerado.

EJERCICIO 1.1.5 *Demuestre que las relaciones de transformación de variables pueden escribirse:*

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_G + \frac{m_2}{M}\vec{r},$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}_G - \frac{m_1}{M}\vec{r}.$$

EJERCICIO 1.1.6 *Demuestre que la energía cinética de un sistema de dos partículas puede escribirse:*

$$K = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\mu v^2.$$

EJERCICIO 1.1.7 *Analice las dificultades que se presentan al tratar de separar variables en el sistema de dos partículas en el caso relativista, es decir cuando las masas dependen de la velocidad en la forma* $m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$.

EJERCICIO 1.1.8 *En el choque de dos partículas, compruebe la equivalencia entre conservación de energía y coeficiente de restitución unidad.*

EJERCICIO 1.1.9 *Suponga un asteroide esférico de 1 Km de diámetro que tiene una rapidez de 60 [Km/s], con una densidad (como el agua) de 1 [gm/cc]. Determine la energía que debería liberar una explosión interna para dividir al asteroide en dos trozos iguales, cada uno formando un ángulo de un grado respecto a la dirección de la velocidad original.*

1.2. Campo Central de Fuerza.

Consideraremos una partícula de masa μ sobre la cual actúa una fuerza central conservativa cuya dirección es paralela al vector posición $\vec{r}$. Más adelante, al estudiar scattering entre dos partículas consideraremos más en detalle la presencia de los dos cuerpos y la transformación entre coordenadas relativas y coordenadas del laboratorio Por ahora, el vector posición $\vec{r}$ representará el vector posición relativo entre las dos partículas. Si escribimos la fuerza central como

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{r},$$

de la ecuación de movimiento anterior, se tiene

$$\mu\vec{a} = \vec{f}(\vec{r}) = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{r},$$

y se deducen de aquí, (demuéstrelo)

▶ TEOREMA 1.1
Se conserva el momentum angular $\vec{l}_O = \mu\vec{r}\times\vec{v}$.

▶ TEOREMA 1.2
La trayectoria está sobre un plano fijo, perpendicular al vector constante $\vec{l}_O$.

Por lo tanto, es suficiente utilizar coordenadas polares (r,θ) en el plano del movimiento. En esas coordenadas, las ecuaciones de movimiento serán

$$\mu\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{dV(r)}{dr} \tag{1.7}$$

y

$$l_O = \mu r^2\dot{\theta} = \text{constante}. \tag{1.8}$$

Eliminando $\dot{\theta}$ es posible escribir una ecuación radial para $r(t)$ y su primera integral que corresponde a la conservación de la energía E. Es decir

$$\mu\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{l_O^2}{\mu r^3}\right) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

y

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + V(r) = E = \text{constante}.$$

Si llamamos potencial efectivo para la coordenada radial a

$$U^{ef} = \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + V(r),$$

este es diferente de cero para una partícula libre. El efecto del primer término es siempre repulsivo lo cual se puede entender, para el caso de una partícula libre que se mueve en línea recta, simplemente porque la distancia r al origen pasa siempre por un mínimo. Para potenciales $V(r)$ atractivos (negativos), en general pueden haber máximos y mínimos de la distancia r, los llamados *puntos de retorno.*

1.2.1. Ecuación diferencial para la órbita.

La dependencia de las variables polares en el tiempo es compleja. Es más simple encontrar la dependencia de la distancia con el ángulo, es decir encontrar la órbita. En efecto, haciendo uso de la conservación del momentum angular, es posible eliminar el tiempo de la ecuación radial (1.7) mediante

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta} = \frac{l_O^2}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta},$$

resultando para $s = 1/r$ la siguiente ecuación diferencial (ecuación de Binet):

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = -\frac{\mu}{l_O^2}\frac{dV(1/s)}{ds}.$$

Para un campo de fuerza inverso al cuadrado de la distancia, la integración de la última ecuación es simple. Es decir si

$$V(r) = -\frac{K}{r},$$

siendo $K > 0$ para el caso atractivo y repulsivo en caso contrario, entonces la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = \frac{\mu}{l_O^2}K,$$

cuya solución general, en términos de dos constantes e y α es

$$s = \frac{\mu K}{l_O^2}(1 - e\cos(\theta - \alpha)),$$