FI21B Sistemas Dinámicos
Guía Control 3

Prof. Felipe Barra - Aux. Nicolas Tejos y Jaime Zuñiga

1. Determine las frecuencias propias y modos normales de pequeñas oscilaciones para los sistemas caracterizados por los siguientes lagrangeanos:

   a) $L = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2} - \frac{w_1^2 x^2 + w_2^2 y^2}{2}$

   b) $L = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2} - \frac{w_1^2 x^2 + w_2^2 y^2}{2} + \alpha x$

   c) $L = \frac{m_1\dot{x}^2+m_2\dot{y}^2}{2} + \beta \dot{x}\dot{y} - \frac{x^2+y^2}{2}$

2. Considere el problema del péndulo doble, de masas m_1 y m_2 y largos L. Encuentre las frecuencias propias y modos normales del sistema para pequeñas oscilaciones. Analice los casos límite:

   a) $m_1 \gg m_2$

   b) $m_2 \gg m_1$

3. Encuentre las frecuencias propias y modos normales de un péndulo doble (figura 1), en el cual el ángulo entre los planos de las oscilaciones de la partícula superior de masa $3m$ y la inferior de masa m es igual a 60^{o}. La longitud de cada barra es igual a L y masa despreciable.

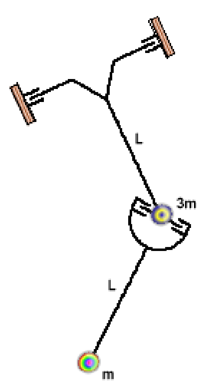

Figura 1: Problema 3

4. Considere $2N$ partículas igualmente espaciadas, a distancia a en equilibrio, unidas por resortes cuyas constantes toman valores k_1 y k_2 alternadamente, dispuestas sobre un anillo de modo que la partícula $2N$ está unida a la 1 (condiciones de borde periódicas). Determine las frecuencias propias y vectores propios. Considere y discuta los casos límite:

   a) $k_1 \to 0$

   b) $k_2 \to \infty$

   c) $k_1 \to k_2$

Nota: puede suponer que N es muy grande de manera que las deformaciones sean lineales.

5. Considere una molécula triatómica de forma triangular con dos átomos iguales de masa m y uno distinto de masa M configurados como se muestra en la figura 2. Los átomos m estan enlazados al átomo central M con una constante elástica k y largo natural L. Determine las frecuencias de vibración de la molécula considerando que no hay fuerzas externas.

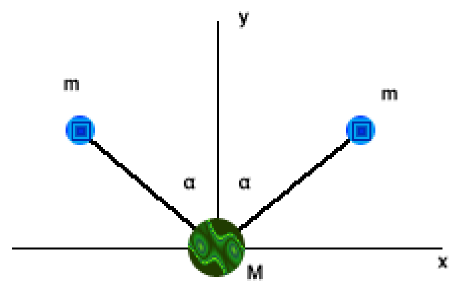

Figura 2: Problema 5

6. Considere una cama como un sólido rígido rectangular plano de masa M sujetada en sus vértices por resortes de constante elástica k y largo natural l_0 (figura 3). Suponga que los resortes se mueven solo verticalmente para pequeñas oscilaciones. Busque coordenadas generalizadas adecuadas para simplificar el problema y encuentre los modos normales de la cama y sus frecuencias propias asociadas.

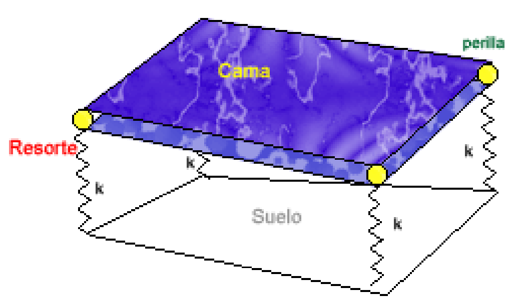

Figura 3: Problema 6

7. Considere un sistema de N masas iguales unidas por resortes de constante elástica k y largo natural l_0 entre dos muros que están a una distancia L. Muestre que para pequeñas oscilaciones los lagrangianos son equivalentes si las masas se pueden desplazar solo verticalmente ó solo horizontalmente. Reescale adecuadamente las constantes del problema y tome el límite al continuo ($N \to \infty$) para deducir la ecuación de ondas.

8. Encuentre los modos normales y frecuencias de oscilación para una cuerda de densidad ρ, tensión τ y largo L, con las siguientes condiciones de borde:

   a) Los dos bordes fijos.

   b) Un borde fijo y uno libre.

   c) Los dos bordes libres.

   d) Bordes unidos (condición de borde periódica).

9. Calcule el flujo de energía para una onda viajera sobre una cuerda infinita. Verifique que el flujo de energía tiene la misma dirección que la de propagación de la onda.

10. Deduzca la solución general de onda viajera para cualquier instante de tiempo, en función de las condiciones iniciales: $y(x, t = 0) = P(x)$ y $\dot{y}(x, t = 0) = Q(x)$.

11. Considere una cuerda infinita de tensión τ tal que su densidad es ρ_1 para $x < 0$, ρ_2 para $0 < x < a$ y ρ_3 para $x > a$. Si hay una onda plana incidente desde $x = -\infty$ de amplitud A, determine el flujo de energía que atravieza la region de densidad ρ_2 y pasa hacia la de densidad ρ_3 viajando hacia $x = \infty$.