1.4. Soluciones

1.4.1. Sistema de partículas

EJERCICIO 1.4.1 *Si cada partícula de un sistema es atraída hacia un punto fijo 0 con una fuerza proporcional a su masa y a su distancia al punto 0, demuestre que el centro de masa se mueve como si fuera una partícula del sistema.*

Solución. Para cada partícula

$$m_i\vec{a}_i = -Km_i\vec{r}_i$$

es decir que cada partícula se mueve de acuerdo a

$$\vec{a}_i = -K\vec{r}_i.$$

Pero

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{a}_i}{M}$$

de modo que si sumamos todas las ecuaciones, obtenemos

$$M\vec{a}_{CM} = -KM\vec{r}_{CM}$$

o sea

$$\vec{a}_{CM} = -K\vec{r}_{CM}$$

misma ecuación de movimiento que la de cada partícula.

▲

EJERCICIO 1.4.2 *Un conjunto de partículas de masas m, puede deslizar libremente sobre alambres paralelos, atrayéndose unas a otras con fuerzas proporcionales al producto de sus masas y distancias. Demuestre que las partículas efectúan oscilaciones armónicas del mismo período relativas a un plano perpendicular a los alambres y que pasa por el centro de masa supuesto en reposo.*

Solución. Supongamos que las correderas están en dirección OX y considere dos de ellas de índices i, j. La ecuación de movimiento de la m_i en la dirección OX será

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j \neq i} K m_i m_j d_{ij} \cos \theta_{ij}$$

donde d_{ij} indica la distancia entre las de índice i, j, y θ_{ij} es el ángulo que forma la línea de la fuerza con el eje OX.

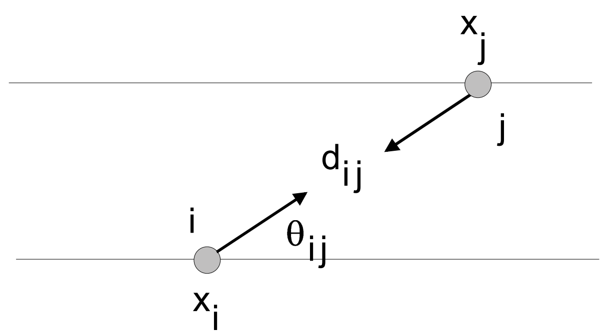

Figura 1.7:

Entonces podemos escribir

$$\ddot{x}_i = Km \sum_{j \neq i} (x_j - x_i).$$

Por otro lado la posición X del centro de masas es

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{\sum x_i}{N},$$

entonces incluyendo $i = j$ se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= Km \sum_j (x_j - x_i) \\ &= KmNx_{CM} - KmNx_i, \end{aligned}$$

es decir

$$\ddot{x}_i + KmN(x_i - x_{CM}) = 0,$$

prueba lo pedido, porque

$$\omega^2 = KmN$$

es independiente de i.

EJERCICIO 1.4.3 *Dos partículas iguales se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Si las partículas deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto, demuestre que el centro de masa describe una cónica con su foco en la intersección de las correderas.*

Solución. Considere la figura. Sea $x = d\cos\theta$, $y = d\sin\theta$ entonces tenemos por aplicación de la segunda Ley de Newton que

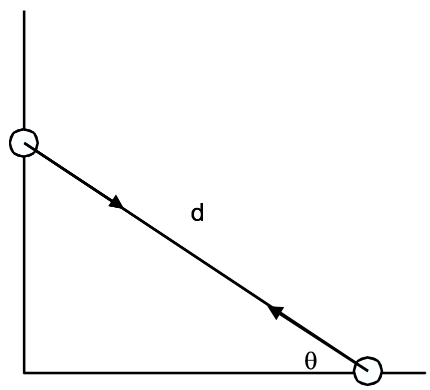

Figura 1.8:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -F\cos\theta = -\frac{k}{d^2}\cos\theta = -\frac{k}{d^3}x \\
m\ddot{y} &= -F\sin\theta = -\frac{k}{d^2}\sin\theta = -\frac{k}{d^3}y
\end{aligned}
$$

por otro lado $x_{CM} = \frac{x}{2}$ y $y_{CM} = \frac{y}{2}$, $r_{CM} = \frac{d}{2}$ entonces podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_{CM} &= -\frac{k}{8mr_{CM}^3}x_{CM}, \\
\ddot{y}_{CM} &= -\frac{k}{8mr_{CM}^3}y_{CM},
\end{aligned}
$$

que equivale a

$$\vec{a}_{CM} = -\frac{k}{8mr_{CM}^3}\vec{r}_{CM}.$$

O sea el centro de masas es atraído hacia el origen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al origen. Problema que se estudia en campo central de fuerzas y se demuestra allí que la trayectoria es necesariamente una sección cónica.

▲

Ejercicio 1.4.4 *Dos partículas de igual masa deslizan sobre correderas lisas perpendiculares que se interceptan en 0. Demuestre que si las partículas se atraen y ellas parten desde el reposo desde posiciones cualquiera sobre las correderas, ellas llegarán simultáneamente a la intersección.*

Solución. Con una figura análoga a la del problema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x} &= -F\cos\theta = -F\frac{x}{d} \\ m_2\ddot{y} &= -F\sin\theta = -F\frac{y}{d} \end{aligned}$$

de donde

$$m_1\ddot{x}y - m_2\ddot{y}x = 0.$$

Como las masas son iguales entonces

$$\begin{aligned} \ddot{x}y - \ddot{y}x &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\dot{x}y - \dot{y}x) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $\dot{x}y - \dot{y}x$ es constante e igual a cero porque las partículas partieron del reposo, o sea

$$\dot{x}y - \dot{y}x = 0,$$

o bien

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y}$$

que puede integrarse dando

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln c + \ln x, \\ y &= cx \end{aligned}$$

o sea si $x = 0$ entonces simultáneamente $y = 0$.

▲

Ejercicio 1.4.5 *Dos partículas de masa m cada una se mueven sobre las correderas lisas perpendiculares OX y OY y se atraen con una fuerza proporcional a su distancia, siendo K la constante de proporcionalidad. Si inicialmente:*

$$x(0) = a, \quad y(0) = a,$$
$$\dot{x}(0) = -V_0, \quad \dot{y}(0) = 0,$$

a) Determine $x(t)$, $y(t)$ y b) Determine la ecuación cartesiana de la trayectoria del centro de masa del sistema.

Solución. Similarmente tendremos

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F\cos\theta = -Kd\cos\theta = -Kx \\ m\ddot{y} &= -F\sin\theta = -Fd\sin\theta = -Ky \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega t + B\sin\omega t, \\ y(t) &= C\cos\omega t + D\sin\omega t, \\ \dot{x}(t) &= \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t), \\ \dot{y}(t) &= \omega(-C\sin\omega t + D\cos\omega t) \end{aligned}$$

y colocando las condiciones iniciales dadas

$$\begin{aligned} a &= A, \\ a &= C, \\ -V_0 &= \omega B, \\ 0 &= \omega D \end{aligned}$$

entonces

a)

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos\omega t - \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t, \\ y(t) &= a\cos\omega t. \end{aligned}$$

b) Las coordenadas del centro de masas son

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{x}{2} = \frac{1}{2}a\cos\omega t - \frac{V_0}{2\omega}\sin\omega t, \\ y_{CM} &= \frac{y}{2} = \frac{1}{2}a\cos\omega t, \end{aligned}$$