

# Escurreimiento de Fluidos Perfectos Compresibles

Alberto de la Fuente Stranger

22 de Octubre de 2004

---

## 1. Ecuaciones

### 1.1. Ecuaciones generales

#### 1.1.1. Ecuación de Continuidad

La ecuación de continuidad para el análisis se expresa de la forma general,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

#### 1.1.2. Ecuaciones de Movimiento

Se define como un fluido perfecto, o no disipativo, aquel que cumple con que sus coeficientes de disipación de momentum,  $\mu, \lambda$ , y calor,  $k$ , son nulos. De esta manera, al reescribir la ecuación de movimiento se obtiene la ecuación de *Euler*:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla p &= f + \nabla \left( \frac{1}{3} \mu \nabla \cdot \vec{u} \right) + \mu \Delta u \\ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla p &= f \end{aligned}$$

Para el análisis de los fluidos perfectos compresibles se considerará además que sobre el fluido no actúan fuerzas externas, por lo tanto,

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla p = 0 \quad (2)$$

#### 1.1.3. Entropía ( $s$ ).

Después, el hecho que los coeficientes disipativos sea nulos, permite decir que los procesos termodinámicos son reversibles. Esta afirmación se sustenta en el hecho que los coeficientes

disipativos son los que nacen de suponer que las incógnitas de la desigualdad de Clauss-Duhem son proporcionales al término que las acompañan.

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad ; \quad 2^o \text{ principio}$$

$$\lambda(\nabla \cdot \vec{u})^2 + 2\mu(D^d \vec{u})^2 + \frac{k\Delta^2 T}{T} = 0$$

$S$ , entropía del sistema, que corresponde es una variable termodinámica que da cuenta de si es posible alcanzar un estado termodinámico mediante una transformación espontánea, sin la acción externa. La energía es la cantidad termodinámica que da cuenta si un estado termodinámico puede ser alcanzado o no.

Dado que la desigualdad de la segunda ley de la termodinámica para este caso es una igualdad, igual a 0, se concluye que el proceso es reversible. Se define además que si el fluido es no disipativo se cumple que no existen fuentes internas de calor ( $r \equiv 0$ ), por lo tanto, el sistema es adiabático y se cumple que

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (3)$$

que significa que  $s$  es constante a lo largo de una línea de corriente. Este resultado no será utilizado por el momento ya imponerlo no permitiría obtener otras conclusiones.

#### 1.1.4. Energía ( $e$ ).

Con los supuestos anteriores, menos que  $s = Cte$ , se plantea que el cambio de energía se debe solo al trabajo ejercido sobre el medio se debe solo a cambios volumétricos debidos a la presión, y que los flujos de calor son asociados a las fuentes internas  $r$ , que, dado que el proceso es reversible, se expresan en función de los cambios de la entropía  $s$ , es decir,

$$dE = \delta Q + \delta W$$

con

$$\delta W = -pdV$$

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

por lo tanto,

$$dE = TdS - pdV$$

$$de = Tds - pd\tau \quad (4)$$

donde  $e$ ,  $s$ ,  $\tau = 1/\rho$ , son las cantidades específicas. De esta expresión se concluye que  $e = e(s, \tau)$ , permitiendo definir que,

$$de = \frac{\partial e}{\partial s} ds + \frac{\partial e}{\partial \tau} d\tau \Rightarrow T = \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_{\tau} \quad ; \quad p = - \left. \frac{\partial e}{\partial \tau} \right|_T$$

Una conclusión de el análisis anterior es que el estado de este tipo de fluidos queda determinado conociendo dos de sus variables termodinámicas, variables que para el análisis anterior

son  $s$  y  $\tau$ . Esta conclusión considera la existencia de una ley de estado para el fluido que establece una relación entre cada una de sus variables de estado.

Una manera alternativa y más útil es expresar el análisis en términos de la temperatura  $T$  en vez de la entropía  $s$ . Para esto se considera como variables base a  $T$  y  $\tau$ , por lo tanto, que  $s = s(T, \tau)$ . De esta manera, la energía del sistema queda como  $e = e(s(T, \tau), \tau)$ , quedando que (4) se expresa en función de estas nuevas variables base como:

$$de = \frac{\partial e}{\partial s} \left( \frac{\partial s}{\partial T} dT + \frac{\partial s}{\partial \tau} d\tau \right) - p d\tau$$

$$de = T \frac{\partial s}{\partial T} dT + \left( T \frac{\partial s}{\partial \tau} - p \right) d\tau$$

de donde se obtiene que;

$$\left. \frac{\partial e}{\partial T} \right|_{\tau} = T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\tau} \quad (5a)$$

$$\left. \frac{\partial e}{\partial \tau} \right|_T = T \left. \frac{\partial s}{\partial \tau} \right|_T - p \quad (5b)$$

Al derivar (5b) por  $T$ , a  $\tau$  constante,

$$\frac{\partial^2 e}{\partial T \partial \tau} = T \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial \tau} + \left. \frac{\partial s}{\partial \tau} \right|_T - \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\tau}$$

por otro lado, derivando (5a) con respecto a  $\tau$ , a  $T$  constante, se obtiene,

$$\frac{\partial^2 e}{\partial \tau \partial T} = T \frac{\partial^2 s}{\partial \tau \partial T}$$

de esta manera, considerando que las funciones  $e$  y  $s$  son suaves (derivadas intercambiables), se obtiene como resultado que

$$\left. \frac{\partial s}{\partial \tau} \right|_T = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\tau}$$

por lo tanto,

$$\left. \frac{\partial e}{\partial \tau} \right|_T = T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{\tau} - p \quad (6)$$

### 1.1.5. Entalpía ( $h$ ).

Otra variable termodinámica de importancia es la entalpía  $h$ , definida como  $h = e + p\tau$  y que es la cantidad de energía que un sistema termodinámico puede intercambiar con el ambiente. Se cumple que,

$$\begin{aligned} dh &= de + d(p\tau) \\ dh &= Tds - pd\tau + p d\tau + \tau dp \\ dh &= Tds + \tau dp \end{aligned} \quad (7)$$

por lo tanto,  $h = h(s, p)$ . Utilizando como variables termodinámicas base a  $T$  y  $p$ , se expresa a  $s = s(T, p)$ , por lo tanto,  $h = h(s(T, p), p)$ , de modo que el cambio de  $h$  queda como,

$$dh = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} dT + \frac{\partial s}{\partial p} dp \right) + \tau dp$$

$$dh = T \frac{\partial s}{\partial T} dT + \left( T \frac{\partial s}{\partial p} + \tau \right) dp$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p = T \frac{\partial s}{\partial T} \quad (8a)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T = T \left. \frac{\partial s}{\partial p} \right|_T + \tau \quad (8b)$$

Derivando (8b), con respecto a  $T$ , con  $p$  fijo. Y (8a), con respecto a  $p$ , a  $T$  fijo, se obtiene que,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial T \partial p} = T \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial p} + \left. \frac{\partial s}{\partial p} \right|_T + \left. \frac{\partial \tau}{\partial T} \right|_p$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial p \partial T} = T \frac{\partial^2 s}{\partial p \partial T}$$

de esta manera, considerando que las funciones  $h$  y  $s$  son suaves, se obtiene que,

$$\left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T = -T \left. \frac{\partial \tau}{\partial T} \right|_p + \tau \quad (9)$$

#### 1.1.6. Calor específico ( $c$ ).

Se define discretamente al calor específico como *la cantidad de calor necesario de suministrar a una unidad de masa para que suba su temperatura en una unidad de temperatura*, definición que en términos continuos se expresa como:

$$c = \frac{\delta Q}{dT} = T \frac{ds}{dT} \quad (10)$$

Esta definición se puede expresar tanto en términos de la energía como de la entalpía, de manera que es posible definir dos calores específico  $c_v$  (a volumen constante) y  $c_p$  (a presión constante), como:

$$c_v = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_\tau = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_\tau \quad (11a)$$

$$c_p = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (11b)$$

### 1.1.7. Ley de Estado de los gases ideales y relaciones para variables termodinámicas.

Partiendo de la primicia que dada una ley de estado del fluido es posible obtener una expresión para cada una de las variables termodinámicas del problema. Por lo tanto, analizando el caso particular de los gases ideales, cuya ley de estado viene dada por la siguiente relación,

$$p = \rho \mathbf{R}T \quad ; \quad p\tau = \mathbf{R}T \quad (12)$$

Es posible obtener una expresión para cada una de las variables termodinámicas del problema ( $s, h, e, p, \rho, T$ ). Reemplazando esta ley de estado en (6) y en (9),

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial e}{\partial \tau} \right|_T &= T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_\tau - p \\ &= T \left. \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\mathbf{R}T}{\tau} \right) \right|_\tau - p \\ &= T \frac{\mathbf{R}}{\tau} - p = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T &= -T \left. \frac{\partial \tau}{\partial T} \right|_p + \tau \\ &= -T \left. \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\mathbf{R}T}{p} \right) \right|_\tau + \tau \\ &= -T \frac{\mathbf{R}}{p} + \tau = 0 \end{aligned}$$

De esta manera se concluye que si se expresa la energía como  $e = e(T, \tau)$ , esta cantidad solo depende de la temperatura ya que la derivada con respecto a  $\tau$  es nula, es decir  $e = e(T)$ . Análogamente, si se expresa la entalpía como  $h = h(T, p)$ , solo depende de la temperatura ya que la derivada con respecto a  $p$  es nula, es decir,  $h(T)$ .

Utilizando la definición de calor específico se obtiene que,

$$de = c_v dT \quad ; \quad e = c_v T \quad (13a)$$

$$dh = c_p dT \quad ; \quad h = c_p T \quad (13b)$$

Una segunda cualidad de estos gases es que, al restar el cambio de  $h$  y el de  $e$ , se obtiene una relación para  $c_v$  y  $c_p$ :

$$dh - de = c_p dT - c_v dT = d(p\tau) = \mathbf{R}dT \Rightarrow \mathbf{R} = c_p - c_v$$

Para el análisis se considerará que el calor específico es una variable constante. Este resultado permite plantear una expresión para  $ds$ , considerando que  $s = s(T, \tau)$

$$\begin{aligned} de &= Tds - p d\tau \\ c_v dT &= Tds - \frac{p}{\rho^2} d\rho \end{aligned}$$

$$c_v dT = T ds + \frac{RT}{\rho} d\rho$$

$$ds = c_v \frac{dT}{T} - \frac{\mathbf{R}}{\rho} d\rho$$

Utilizando como variables termodinámicas base a la entropía y la presión, es decir, la temperatura se expresa como  $T = T(s, p)$ , se obtiene para los gases ideales

$$ds = c_v \frac{dT}{T} - \frac{\mathbf{R}}{\rho} d\rho$$

$$ds = c_v \frac{d(\tau p)}{\tau p} - \frac{\mathbf{R}}{\rho} d\rho$$

$$ds = c_v \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} (c_v + \mathbf{R})$$

$$\frac{ds}{c_v} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} \frac{c_p}{c_v} \quad \bigg/ \int$$

$$p = e^{\frac{s-s_0}{c_v}} \rho^\gamma \quad (14)$$

con  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ , constante. De esta manera se expresa que  $p = p(s, \rho)$ . Analizando el cambio de  $p$  en el tiempo, se obtiene que

$$\frac{dp}{dt} = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \frac{d\rho}{dt} + \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_\rho \frac{ds}{dt}$$

de donde se define la velocidad  $c$ , que corresponde a la velocidad del sonido, como,

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$$

Introduciendo ahora que para este análisis  $s$  es constante, se obtiene que

$$p = p(\rho) = Cte \rho^\gamma$$

por lo tanto, para los gases ideales se cumple además que

$$\frac{dp}{dt} = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \frac{d\rho}{dt} \quad (15)$$

con

$$c^2 = \gamma \mathbf{R} T = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (16)$$

Finalmente, la energía y la entalpía quedan determinadas de la siguiente manera:

$$e = c_v T = c_v \frac{c^2}{\mathbf{R} \gamma} = \frac{c_v}{c_p - c_v} \frac{c^2}{\gamma} = \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)}$$

$$h = e + \tau p = \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{c^2}{\gamma} = \frac{c^2}{(\gamma - 1)} \quad (17)$$

Quedando así definidas las variables termodinámicas del problema, para un gas ideal perfecto, o no disipativo, donde los procesos son reversibles y adiabático ya que por definición  $r = 0$ .