



Análisis de Señales

Capítulo IV: Densidad espectral y correlación

Profesor: Néstor Becerra Yoma



4.1 Densidad espectral de energía

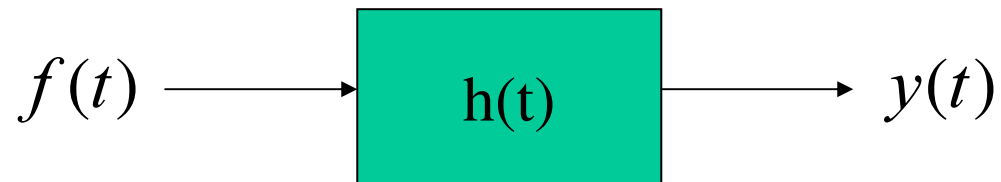
- Teorema de Parseval \Rightarrow relación entre $f(t)$ y $F(\omega)$, energía de una señal.

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

- $|F(\omega)|^2 \Rightarrow$ densidad espectral de energía, permite calcular la energía en una banda de frecuencias
- $F(-\omega) = F(\omega)^* \Rightarrow |F(-\omega)|^2 = |F(\omega)|^2 \Rightarrow |F(\omega)|^2$ es par



4.1 Densidad espectral de energía



- Atenuación de la energía de una señal al pasar por un sistema

$$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega) \Rightarrow |Y(\omega)|^2 = |F(\omega)|^2 |H(\omega)|^2$$

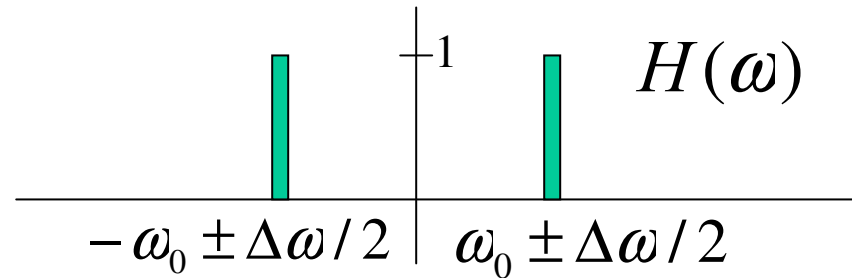
- Energía en la salida:

$$E_Y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 |F(\omega)|^2 d\omega$$



4.1 Densidad espectral de energía

- Si el filtro es un pasabandas estrecho:



$$E_Y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$E_Y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0 - \Delta\omega/2}^{-\omega_0 + \Delta\omega/2} |F(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$E_Y = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} |F(\omega)|^2 d\omega$$



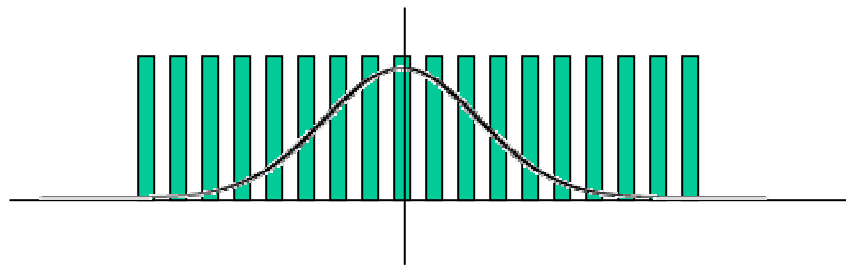
4.1 Densidad espectral de energía

$$E_Y = \frac{1}{\pi} \int_{\omega=\omega_0-\Delta\omega/2}^{\omega_0+\Delta\omega/2} |F(\omega)|^2 d\omega$$

- Si $\Delta\omega$ pequeño:

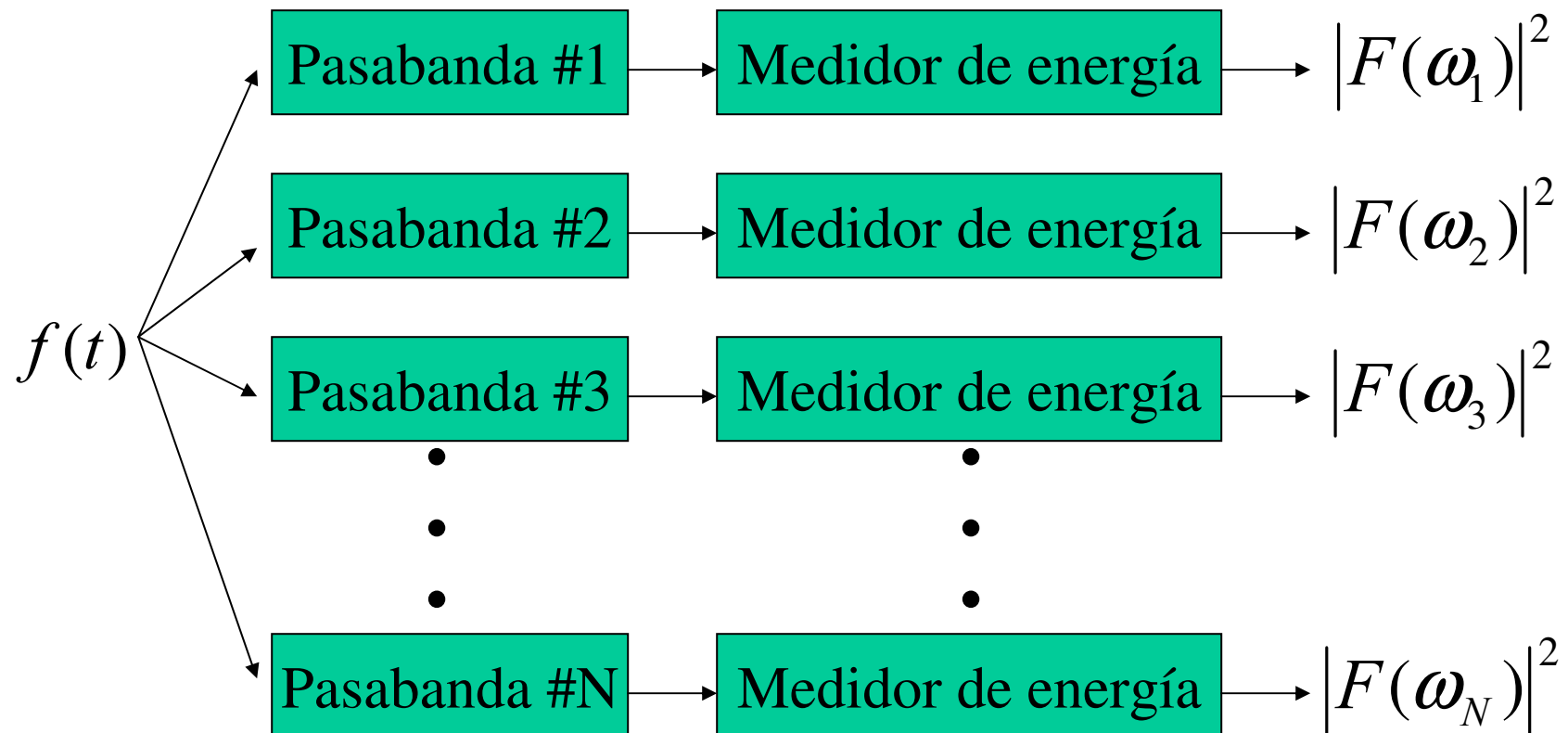
$$E_Y = \frac{1}{\pi} |F(\omega_0)|^2 \Delta\omega$$

- Densidad espectral de energía: se grafica usando un banco de filtros pasabanda



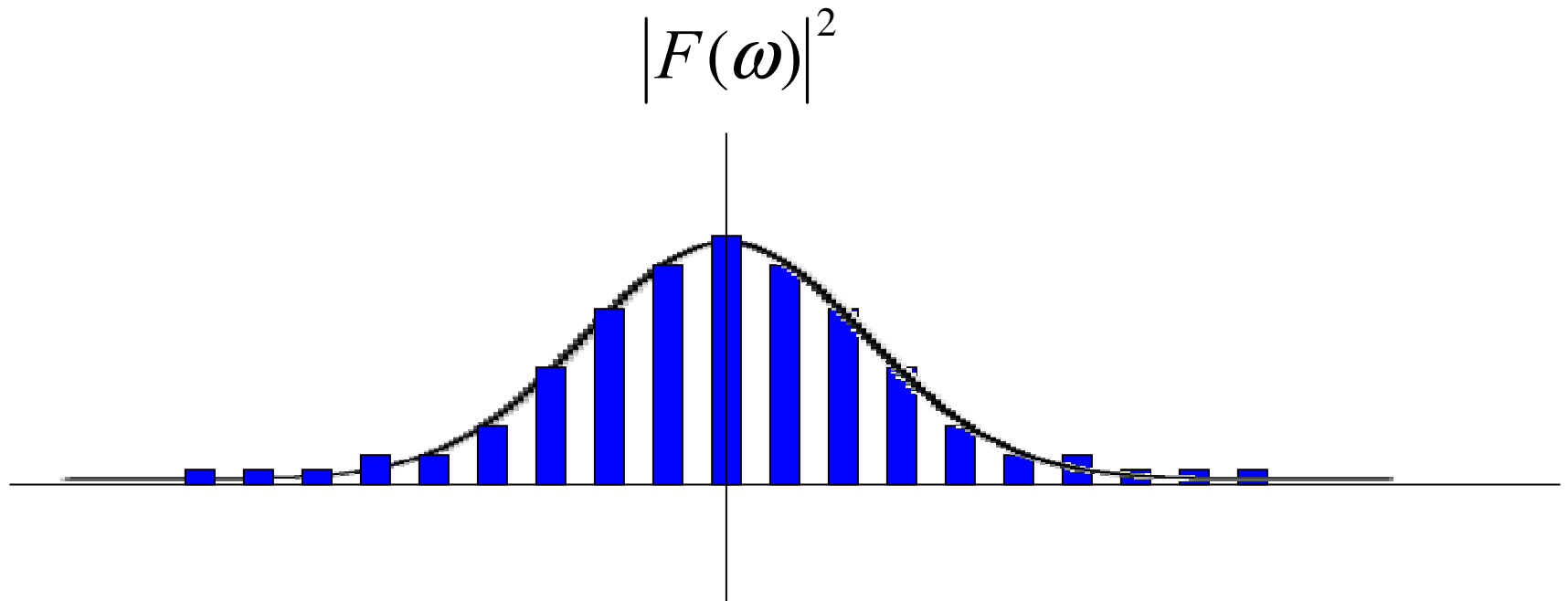


4.1 Densidad espectral de energía





4.1 Densidad espectral de energía





4.1 Densidad espectral de energía

- Ej: Una señal $f(t)$ se aplica a un filtro pasabanda ideal, de ganancia de baja frecuencia 1 y ancho de banda 5 [rad/s]. Determinar la energía de la señal a la entrada y a la salida.

$$f(t) = e^{-5t}u(t) \Rightarrow F(\omega) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-5t-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega + 5}$$

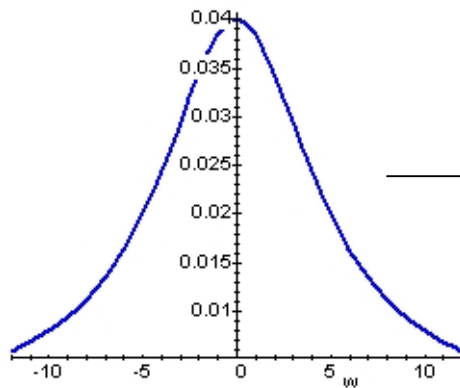
$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + 25}$$

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in [-5, 5] \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

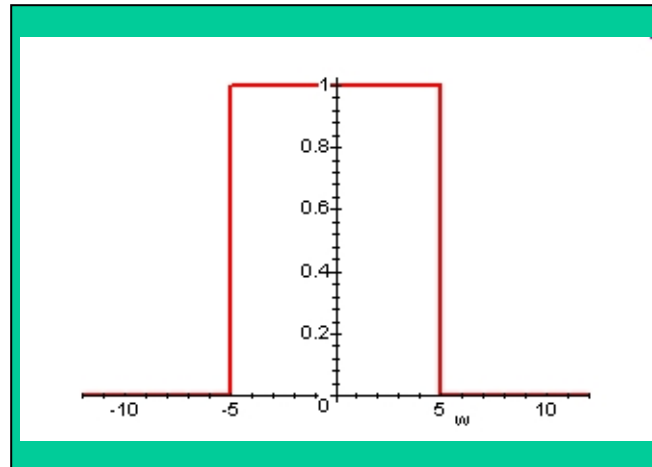


4.1 Densidad espectral de energía

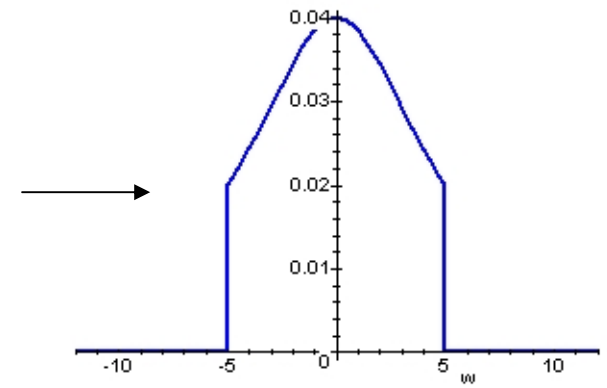
$$|F(\omega)|^2$$



$$|H(\omega)|^2$$



$$|Y(\omega)|^2$$



$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + 25}$$

$$|H(\omega)|^2 = \begin{cases} 1 & \omega \in [-5, 5] \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$



4.1 Densidad espectral de energía

$$f(t) = e^{-5t}u(t) \Rightarrow E_F = \int_{t=0}^{\infty} e^{-5t} dt = \frac{1}{5}$$

$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2 + 25}, \quad |H(\omega)|^2 = \begin{cases} 1 & \omega \in [-5, 5] \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

$$E_F = \int_{t=0}^{\infty} (e^{-5t})^2 dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-10t} dt = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$E_Y = \frac{1}{\pi} \int_{\omega=0}^5 \frac{1}{\omega^2 + 25} d\omega = \frac{1}{\pi} \frac{1}{5} \tan^{-1}(1) = \frac{1}{5\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{20} = 0.05$$



4.2 Densidad espectral de potencia

- No todas las señales tienen energía finita
- Algunas de ellas tienen potencia media finita => señales de potencia

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \overline{f^2(t)}$$

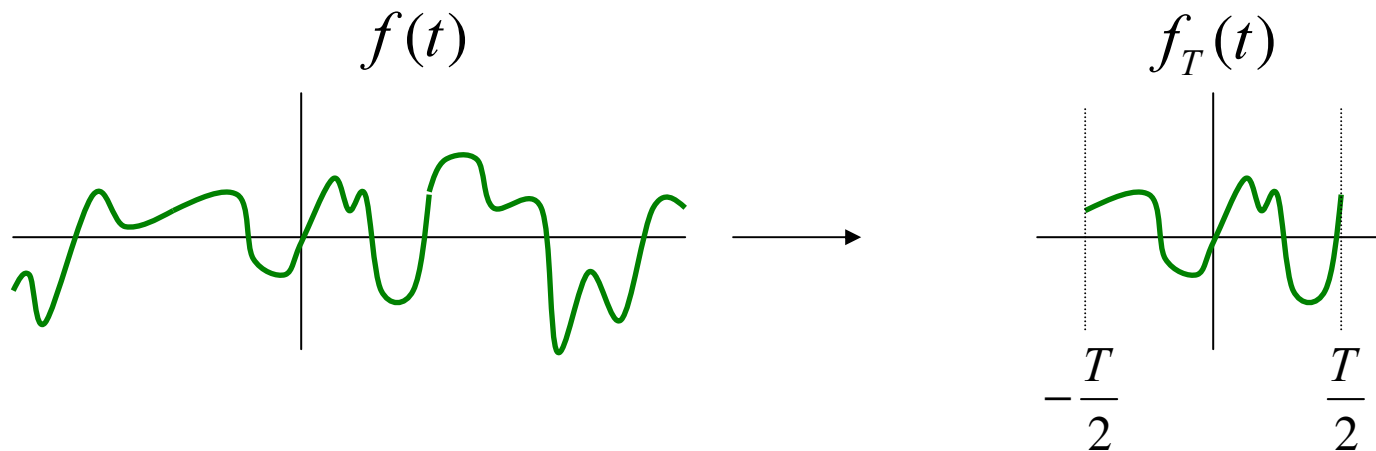
- Se puede definir una densidad espectral de potencia:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega$$



4.2 Densidad espectral de potencia

- S_f se puede aplicar tanto en el caso determinístico como aleatorio.
- Cálculo de S_f : Supongamos que se tiene una señal $f(t)$, y cortamos un trozo



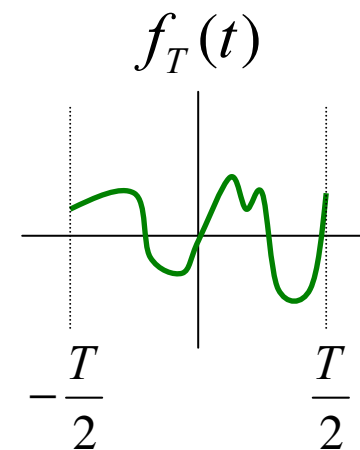


4.2 Densidad espectral de potencia

$$E_{F_T} = \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega$$

$$P_{F_T} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega$$



$$\Rightarrow P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega$$



4.2 Densidad espectral de potencia

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \right) d\omega$$

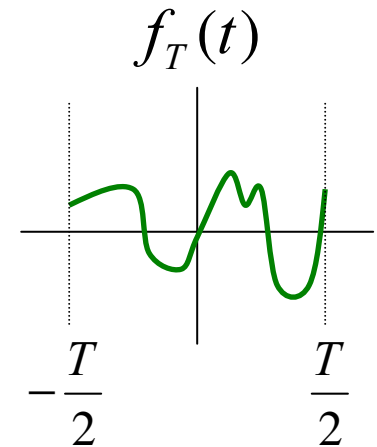
$$S_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} = \text{espectro de potencia de } f(t)$$

Se puede estimar usando T grande



4.2 Densidad espectral de potencia

- Si se usa un trozo de largo T para aproximar $S_f \Rightarrow$ la resolución en frecuencia es del orden de $1/T$
- Se requieren T grandes para buena resolución de S_f .



$$f_T(t) = f(t) \text{rect}(t/T)$$

$$F_T(\omega) = F(\omega) * \underbrace{T \text{Sa}(\omega T / 2)}$$

Filtro pasabajos, baja la resolución en frecuencia.
El espectro se “aplana” y pierde detalles



4.2 Densidad espectral de potencia

Densidad espectral de potencia de una señal de potencia:

$$S_f(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0)$$

F_n

Coeficiente de la serie de Fourier exponencial.



4.2 Densidad espectral de potencia

- Ej: Hallar la S_f para un coseno:

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

- Solución: descomponiéndolo en exponenciales:

$$f(t) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{j\omega_0 t}$$

$$F_1 = \frac{A}{2} e^{j\phi}, F_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\phi}, F_n = 0 \text{ para otro } n$$



4.2 Densidad espectral de potencia

$$S_f = 2\pi \frac{A^2}{2^2} \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi \frac{A^2}{2^2} \delta(\omega + \omega_0)$$

$$S_f = \frac{1}{2} \pi A^2 (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \pi A^2 (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) d\omega$$

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{4} A^2 + \frac{1}{4} A^2 = \frac{1}{2} A^2$$



4.2 Densidad espectral de potencia

- Ej 2: Encontrar, para T finito e infinito, la expresión para la densidad espectral de potencia de:

$$f(t) = Ae^{j\omega_0 t} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

- Solución:

$$\mathfrak{F}\left\{A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = AT \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$F(\omega) = \mathfrak{F}\left\{A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{j\omega_0 t}\right\} = AT \text{Sa}\left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2}\right)$$

$$\frac{|F(\omega)|^2}{T} = |A|^2 T \text{Sa}^2\left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2}\right)$$



4.2 Densidad espectral de potencia

- Para un T finito:

$$S_f(\omega) = \frac{|F(\omega)|^2}{T} = |A|^2 T S a^2 \left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2} \right)$$

- Para T infinito:

$$S_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(\omega)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi |A|^2 \underbrace{\frac{T}{2\pi} S a^2 \left(\frac{(\omega - \omega_0)T}{2} \right)}_{\text{Área} = 1}$$
$$S_f(\omega) = 2\pi |A|^2 \delta(\omega - \omega_0)$$



4.3 Ruido promediado en el tiempo

- Ruidos: poco predecibles, contaminan la señal, fluctuaciones erráticas
- Se pueden describir de forma estadística, pero no analítica.
- Algunos ejemplos de promedios:

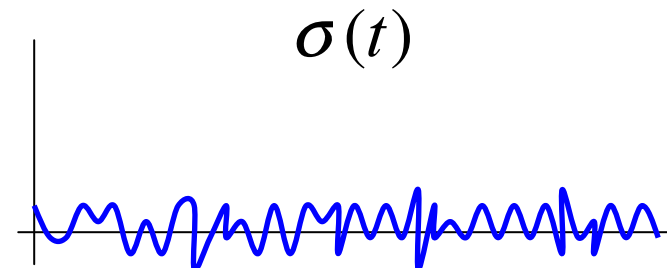
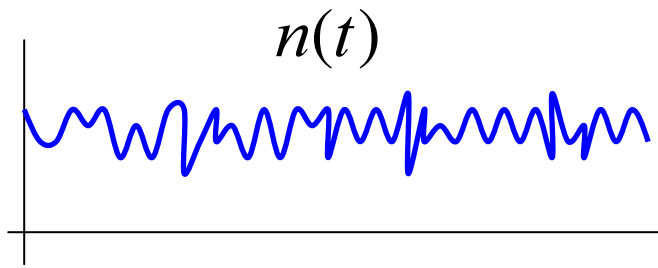
– Valor medio:
$$\overline{n(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(t) dt$$

– Valor cuadrático medio:
$$\overline{n^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |n(t)|^2 dt$$



4.3 Ruido promediado en el tiempo

- Raíz cuadrática media (rms): $\sqrt{\overline{n^2(t)}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |n(t)|^2 dt}$
- Componente alterna (ca): $\sigma(t) = n(t) - \overline{n(t)}$
(no es un promedio)
- Notar que los promedios (que tienen la barra arriba) son constantes y no funciones de t





4.3 Ruido promediado en el tiempo

$$\overline{n^2(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |n(t)|^2 dt$$

$$\overline{n^2(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\overline{n(t)} + \sigma(t)|^2 dt$$

$$\overline{n^2(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\overline{n(t)}|^2 dt + 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{n(t)} \sigma(t) dt + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\sigma(t)|^2 dt$$

$$\overline{n^2(t)} = |\overline{n(t)}|^2 + \overline{\sigma^2(t)}$$

Constante

Media cero



4.3 Ruido promediado en el tiempo

- Ej: Calcular el valor medio, la potencia de ca y el valor rms para: $v(t) = 1 + \cos(\omega_0 t)$

$$\overline{v(t)} = \overline{1 + \cos(\omega_0 t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (1 + \cos(\omega_0 t)) dt = 1$$

$$\overline{\sigma^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\overline{v^2(t)} = \overline{v(t)}^2 + \overline{\sigma^2(t)} = \frac{3}{2}$$

$$v_{RMS} = \sqrt{\overline{v^2(t)}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$



4.3 Ruido promediado en el tiempo

- Razón señal a ruido:

$$\frac{S}{N} = \overline{s^2(t)} / \overline{n^2(t)}$$

Potencia de la señal limpia

- En decibeles:

$$SNR = 10 \log \left(\overline{s^2(t)} / \overline{n^2(t)} \right) [dB]$$

SNR- Signal-To-Noise ratio



4.4 Funciones de correlación

- La densidad espectral de potencia es:

$$S_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2$$

- Se desea encontrar su representación en el tiempo:

$$\mathfrak{I}^{-1}\{S_f(\omega)\} = R_f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_T^*(\omega) F_T(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$



4.4 Funciones de correlación

$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \left(\int_{t_1=-T/2}^{T/2} f^*(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 \right) \left(\int_{t_2=-T/2}^{T/2} f(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2 \right) e^{j\omega \tau} d\omega$$

$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1=-T/2}^{T/2} f^*(t_1) \int_{t_2=-T/2}^{T/2} f(t_2) \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t_1-t_2+\tau)} d\omega dt_2 dt_1$$

$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1=-T/2}^{T/2} f^*(t_1) \int_{t_2=-T/2}^{T/2} f(t_2) \delta(t_1 - t_2 + \tau) dt_2 dt_1$$

$$t_1 - t_2 + \tau = 0 \Rightarrow t_2 = t_1 + \tau$$

$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1=-T/2}^{T/2} f^*(t_1) f(t_1 + \tau) dt_1$$

$$\Rightarrow R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) f(t + \tau) dt$$



4.4 Funciones de correlación

- Función de autocorrelación de f :

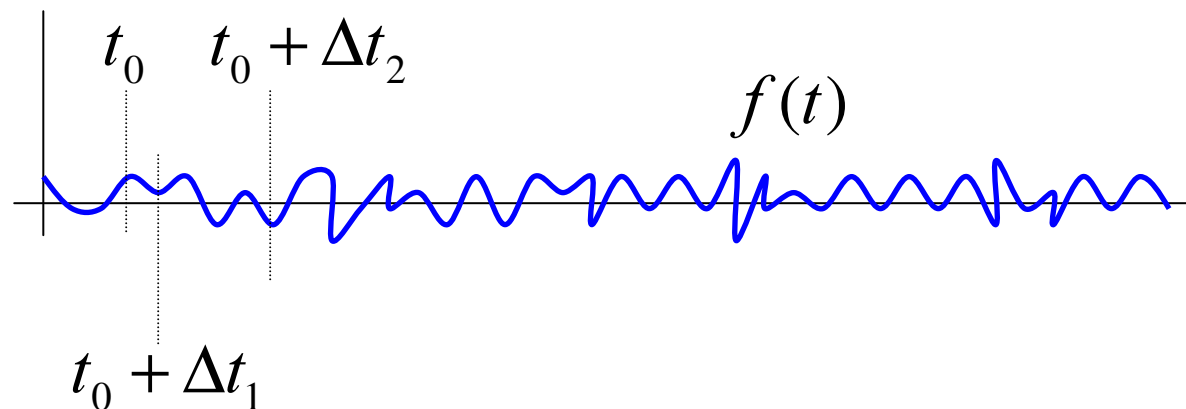
$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) f(t + \tau) dt, \quad \mathfrak{F}\{R_f(\tau)\} = S_f(\omega)$$

- Nueva forma de calcular S_f .
- La autocorrelación también equivale a la convolución de $f(t)$ con $f(-t)$ para señales reales.



4.4 Funciones de correlación

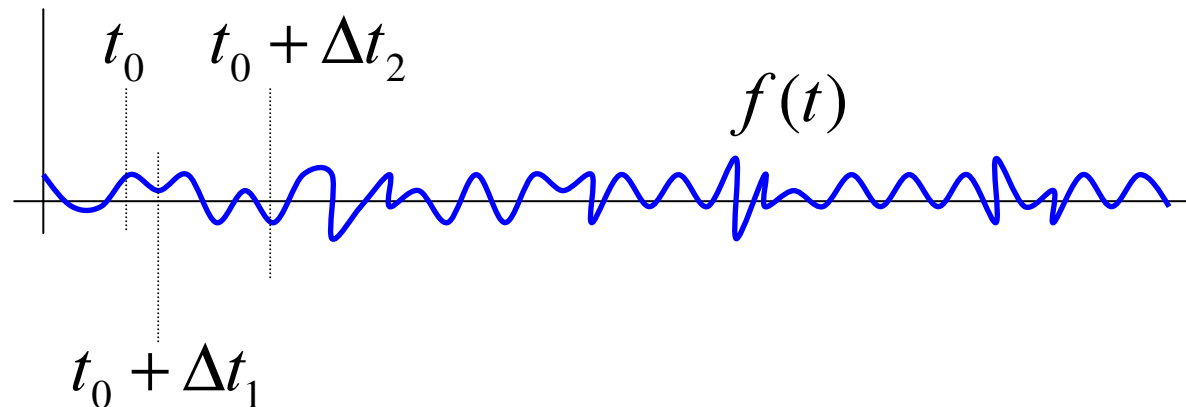
- Idea intuitiva para $f(\cdot)$ real: En promedio, el signo de $f(t)$ es igual al signo de $f(t+\Delta t)$ para Δt pequeño (por continuidad por tramos de la función), pero puede ser distinto para Δt grande



$$R_f(\tau) = \overline{f^*(t) f(t + \tau)}$$



4.4 Funciones de correlación



$$R_f(\tau) = \overline{f^*(t) f(t + \tau)}$$

Correlación: entre $f(t)$ y $f(t + \tau)$
Para $f(\cdot)$ real

$R_f(\tau_0) > 0 \Rightarrow$ En promedio, $f(t)$ y $f(t + \tau_0)$ tienen el mismo signo

$R_f(\tau_1) < 0 \Rightarrow$ En promedio, $f(t)$ y $f(t + \tau_1)$ tienen signo opuesto



4.4 Funciones de correlación

- Ej: Encontrar la autocorrelación para:

$$f(t) = 2 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2 \cos(\omega_0 t + \theta) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta) dt$$

$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_0 \tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta) dt$$

$$R_f(\tau) = \cos(\omega_0 \tau)$$

- Notar que se pierde la información de la fase



4.4 Funciones de correlación

- En general, los ruidos $n(t)$ pueden cambiar de signo rápidamente con el tiempo $\Rightarrow R_n(\tau)$ es positiva para τ muy pequeño, tiene un “peak” grande en $t=0 \Rightarrow$ permite separar la señal del ruido
- Ejemplo: la señal es un trozo de onda periódica cuadrada (R aproximado para T grande) y el ruido es aleatorio.
- Aunque el ruido sea tal que no permita distinguir la señal, al usar la correlación se puede “ver”.



4.4 Funciones de correlación

- Para separar (y no sólo distinguir) la señal del ruido se debe definir otro promedio para señales: la correlación cruzada.

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) g(t + \tau) dt$$



4.4 Propiedades de la correlación

- Simetría:

$$R_f(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) f(t - \tau) dt$$

$$R_f(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t' + \tau) f(t) dt$$

$$R_f(-\tau) = R_f^*(\tau)$$

- Parte real par, imaginaria impar



4.4 Propiedades de la correlación

- Valor cuadrático medio:

$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) f(t + \tau) dt$$

$$R_f(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) f(t) dt = \overline{f^2(t)} = P$$

- Periodicidad:

$$f(t + T) = f(t) \Rightarrow R_f(t + T) = R_f(t)$$



4.4 Propiedades de la correlación

- Valor promedio: Sean $f(t)$, $g(t)$ dos señales. Sea $f(t)=x(t)+m_1$, $g(t)=y(t)+m_2$; $x(t)$, $y(t)$ con media cero.

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) + m_1]^* [y(t + \tau) + m_2] dt$$

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) y(t + \tau) dt + m_1 m_2$$

$$\overline{R_{fg}(\tau)} = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_{\tau=-T'/2}^{T'/2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{T/2} x^*(t) y(t + \tau) dt d\tau + m_1 m_2$$



4.4 Propiedades de la correlación

$$\overline{R_{fg}(\tau)} = \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_{\tau=-T'/2}^{T'/2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{T/2} x^*(t) y(t + \tau) dt d\tau + m_1 m_2$$

$$\overline{R_{fg}(\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{T/2} x^*(t) \lim_{T' \rightarrow \infty} \frac{1}{T'} \int_{\tau=-T'/2}^{T'/2} y(t + \tau) d\tau dt + m_1 m_2$$

$$\overline{R_{fg}(\tau)} = m_1 m_2$$

- El valor medio de la correlación cruzada de $f(t)$ y $g(t)$ es el producto de sus valores medios.
- \Rightarrow El valor medio de la autocorrelación de $f(t)$ es el cuadrado de su valor medio.



4.4 Propiedades de la correlación

- Valor máximo: $R_f(0)$ es el máximo de $R_f(\tau)$
 - Idea: desigualdad de Schwarz

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) f(t + \tau) dt \right|^2 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f^*(t + \tau)|^2 dt$$

$$R_f^2(\tau) \leq R_f(0) R_f(0)$$



4.4 Propiedades de la correlación

- Aditividad:

$$R_{x+y}(\tau) = \overline{(x^*(t) + y^*(t))(x(t + \tau) + y(t + \tau))}$$

$$R_{x+y}(\tau) = x^*(t)x(t + \tau) + x^*(t)y(t + \tau) + y^*(t)x(t + \tau) + y^*(t)y(t + \tau)$$

$$R_{x+y}(\tau) = R_x(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_y(\tau)$$

- Si x e y no correlacionadas entre si:

$$R_{x+y}(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau)$$



4.5 Correlación para señales de energía finita

- Extensión para señales de energía finita

$$r_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) f(t + \tau) dt, \quad r_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t + \tau) dt$$

- Para señales reales, se parece a la convolución con una de las funciones “dada vuelta” horizontalmente:

$$(f * g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(\tau - t) dt$$



4.6 Correlación para señales de energía finita

- La transformada de Fourier de la correlación para energía finita da.

$$\mathfrak{I}\{r_f(\tau)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{t=-\infty}^{\infty} f^*(t) f(t+\tau) dt e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\mathfrak{I}\{r_f(\tau)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} f^*(t) \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(t+\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau dt$$

$$\mathfrak{I}\{r_f(\tau)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} f^*(t) F(\omega) e^{j\omega t} dt$$

$$\mathfrak{I}\{r_f(\tau)\} = |F(\omega)|^2$$



4.7 – Ruido blanco de banda limitada

- Ruido blanco ideal(RB): su espectro de potencia contiene todas las frecuencias.

$$S_n(\omega) = \frac{\eta}{2} = cte$$

- No se puede generar físicamente (voltaje, corriente, etc) ya que:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) d\omega = \infty$$

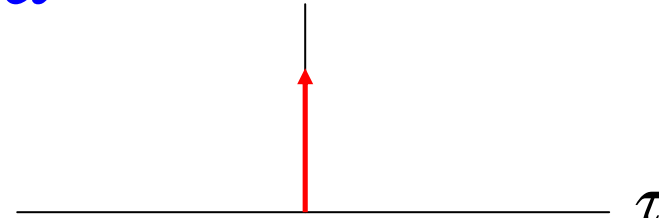
- \Rightarrow ¡tiene potencia media infinita!



4.7 – Ruido blanco de banda limitada

- Además, su correlación es:

$$R_n(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{\eta}{2}\right\} = \frac{\eta}{2}\delta(\tau)$$



- Anteriormente se dijo que, en promedio, $f(t)$ y $f(t+\Delta t)$ tienen el mismo signo si f es continua por tramos. En este caso, $R_n(\tau)=0$ para todo $\tau>0$
- \Rightarrow ¡El ruido blanco varía infinitamente rápido! (es discontinuo en todo punto del eje real), “nube” de puntos, no es realizable ni siquiera usando un computador.



4.7 – Ruido blanco de banda limitada

- Utilidad del ruido blanco ideal: Cualquier señal de potencia (ruido) se puede modelar como ruido blanco filtrado.
- Si se desea un ruido $f(t)$ con un espectro de potencia $S_f(\omega)$, se puede obtener filtrando ruido blanco, el filtro debe tener el espectro deseado:

$$f(t) = n(t) * h(t) \quad \Rightarrow \quad S_f(\omega) = \frac{\eta}{2} |H(\omega)|^2$$

- Se puede usar este método usando una aproximación al ruido blanco ideal.



4.7 – Ruido blanco de banda limitada

- Ruido blanco de banda limitada(RBBL): Tiene un espectro constante, pero con un ancho de banda B finito (pero grande)
- Su valor cuadrático medio (potencia) es:

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{\eta}{2} d\omega = \eta B$$

- Usualmente se crea usando un generador de números aleatorios, o bien mediante ruido térmico



4.7 – Ruido blanco de banda limitada

- También se puede usar para generar ruidos con un espectro de potencia arbitrario simplemente filtrándolo:

$$f(t) = n(t) * h(t) \quad \Rightarrow \quad S_f(\omega) = \frac{\eta}{2} |H(\omega)|^2$$

- Condición: el ancho de banda del RBBL debe ser mayor que el ancho de banda del filtro \Rightarrow el filtro lo “ve” como ruido blanco ideal.



4.7 – Ruido blanco de banda limitada

- Otro posible uso del RBBL es identificar respuestas en frecuencia de filtros. Si $H(\omega)$ es desconocido:

$$f(t) = n(t) * h(t) \quad \Rightarrow \quad |H(\omega)|^2 = \frac{2}{\eta} S_f(\omega)$$
$$H(\omega) = S_f(\omega)$$

- Es decir, la respuesta en frecuencia del filtro se puede identificar analizando la señal de salida.



4.7 – Ruido blanco de banda limitada

- Al pasar ruido blanco por un sistema lineal, la potencia de salida es:

$$\overline{n_O^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{2} |H(\omega)|^2 d\omega$$

$$\overline{n_O^2(t)} = \frac{\eta}{2\pi} \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$



4.8 – Ruido térmico

- Se produce como resultado del movimiento caótico de los electrones libres. El efecto neto es una corriente en la resistencia, aleatoria y de media cero. La potencia que contiene el ruido es:

$$S_n(\omega) = \frac{h|\omega|}{\pi \left(e^{\frac{h|\omega|}{2\pi KT}} - 1 \right)} \left[\frac{W}{rad / s} \right]$$



4.8 – Ruido térmico

- Se puede suponer ruido blanco dentro de cierta banda

$$\omega \in \left[-2\pi \frac{KT}{h}, 2\pi \frac{KT}{h} \right] \Rightarrow S_n(\omega) \approx 2KT \left[\frac{W}{H_z} \right]$$

- El número (KT/h) es del orden de 6000GHz
- => se puede considerar ruido blanco para todos los efectos.