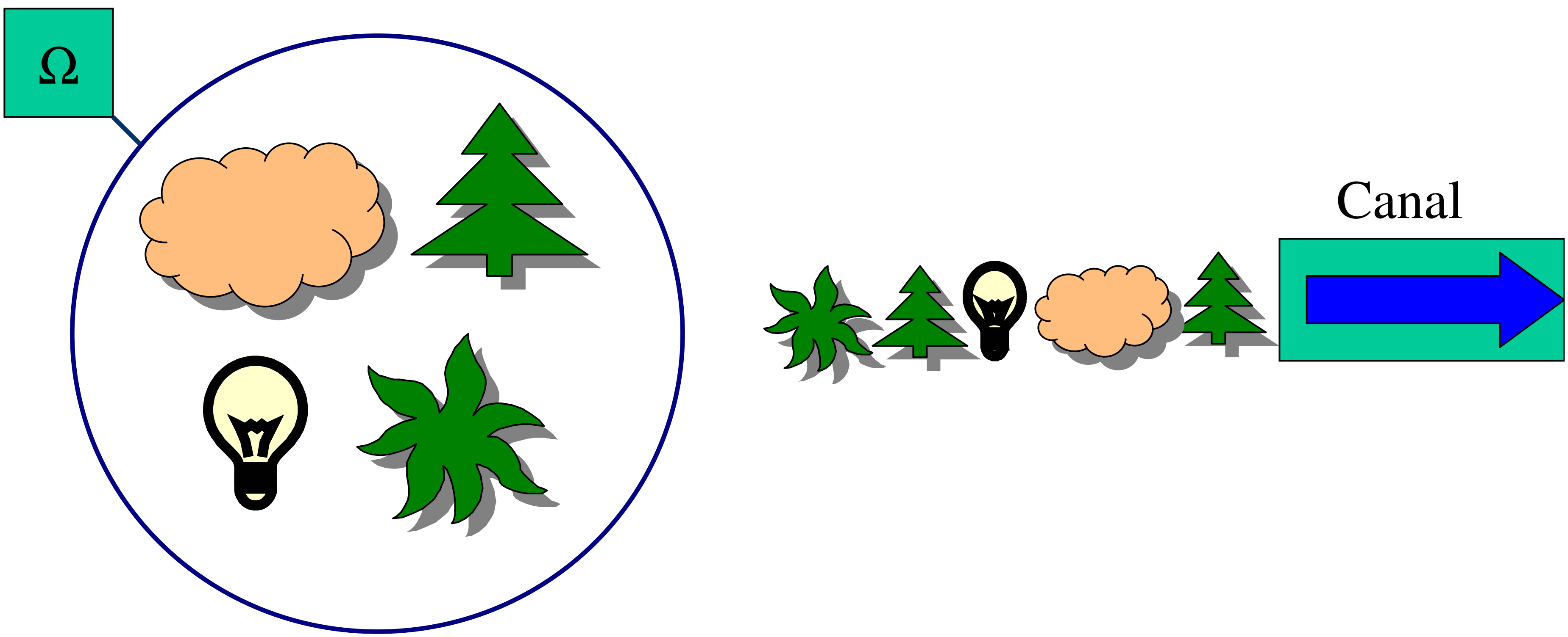
Análisis de Señales

Capítulo VIII: Transmisión de información

Profesor: Néstor Becerra Yoma

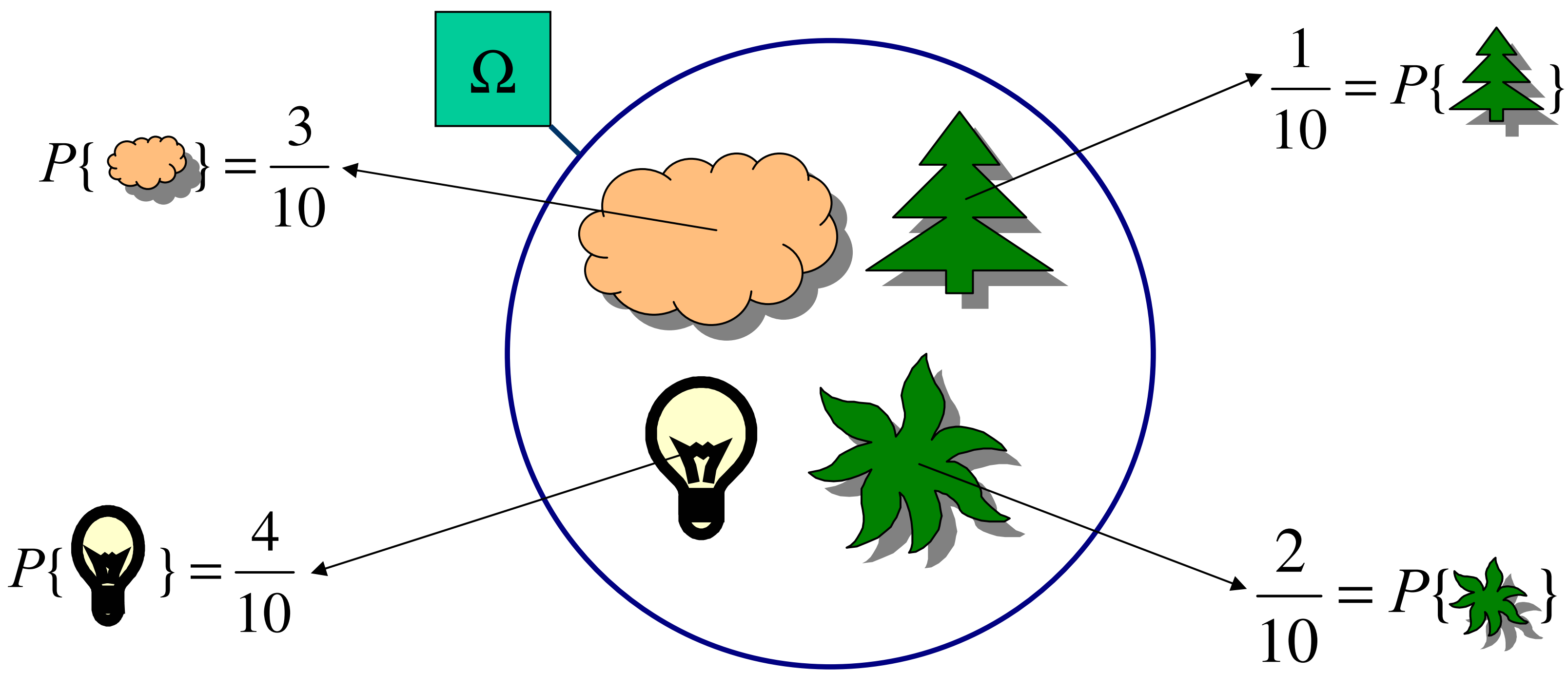
1.1 Probabilidades de símbolos

- Se tiene un conjunto de varios símbolos, los que son enviados constantemente a través de un canal.



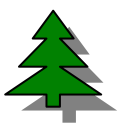
1.1 Probabilidades de símbolos

- A cada símbolo se le puede asociar una probabilidad de acuerdo a la frecuencia con que es enviado a través del canal.



1.1 Probabilidades de símbolos

- La probabilidad de enviar un símbolo A o un símbolo B es igual a la suma de las probabilidades de enviar cada uno.

$P\{$  $,$  $\} = P\{$  $\} + P\{$  $\}$

1.1 Probabilidades de símbolos

- La probabilidad de que se envíe una <u>secuencia</u> de símbolos dada (un <u>mensaje</u>) se obtiene multiplicando la probabilidad de cada símbolo a enviar.
- Lo anterior es válido suponiendo independencia entre los símbolos (el símbolo anterior no influye en el próximo a enviar)

1.2 Representación de mensajes

- Para poder enviar los mensajes por el canal es necesario codificar cada símbolo mediante una secuencia de bits
- Uno de los métodos más eficientes para asignar secuencias de bits a los símbolos es el algoritmo de Huffman que asigna secuencias más largas a los símbolos menos probables.
- Este método se usa comúnmente para comprimir archivos de computador (tipo winzip)

1.2 Representación de mensajes

- Ejemplo: Se tiene el siguiente mensaje:
  - "mi mama me mima"
- Encontrar una secuencia de bits para cada símbolo (carácter) de modo de que el largo en bits del mensaje sea mínimo
  - Primero se deben calcular las probabilidades para cada símbolo. Par esto, se cuenta cuántas veces aparece cada uno.

'm'=6 ' '=4 'a'=3 'i'=2 'e'=1

1.2 Representación de mensajes

‘m’=6 ‘ ’=4 ‘a’=3 ‘i’=2 ‘e’=1

$$P\{m\}=\frac{6}{16},\ P\{\ \}=\frac{4}{16},\ P\{a\}=\frac{3}{16},\ P\{i\}=\frac{2}{16},\ P\{e\}=\frac{1}{16}$$

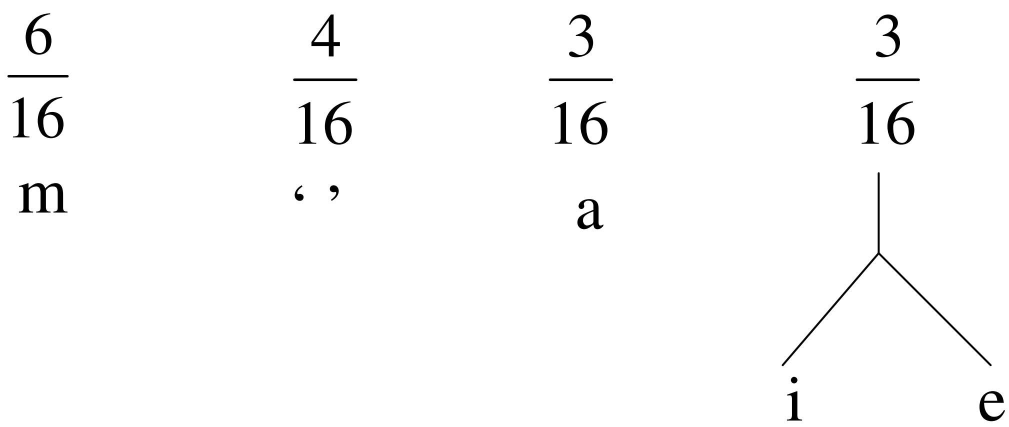
– Ahora se debe ir formando un arbol del siguiente modo: “se eligen los 2 símbolos menos probables y se agrupan como un nuevo símbolo”

1.2 Representación de mensajes

$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$
m	‘ ’	a	i	e

- Se agrupan la ‘i’ y la ‘e’, ya que son los menos probables

1.2 Representación de mensajes

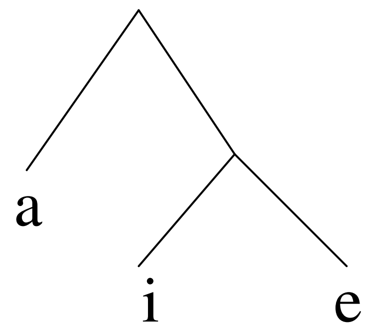


- Se agrupan la ‘ie’ y la ‘a’, ya que son los menos probables

1.2 Representación de mensajes

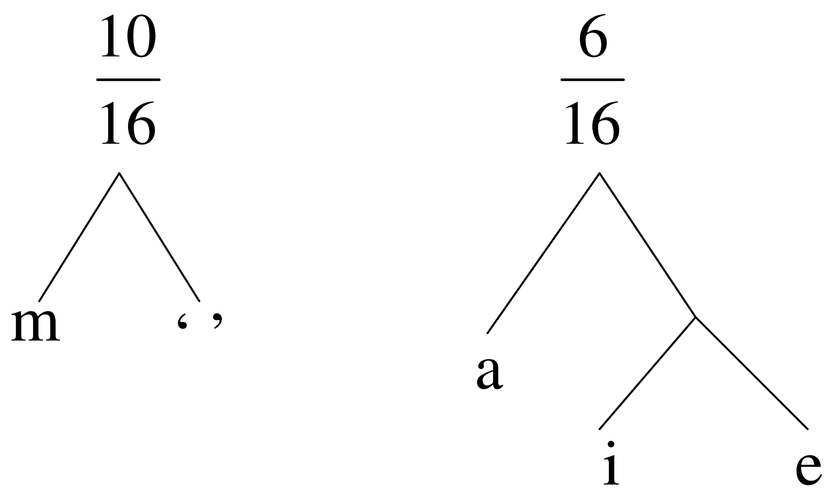
$\frac{6}{16}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{6}{16}$

m ‘ ’



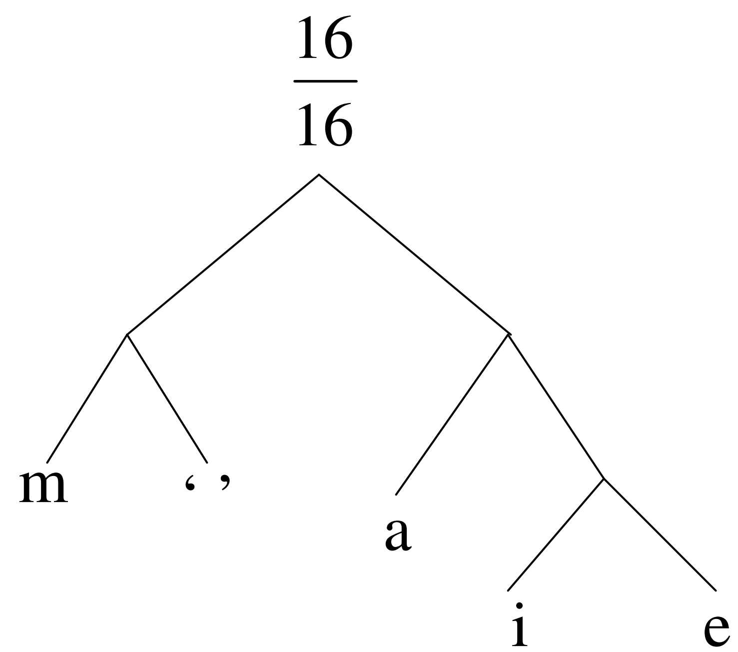
- Se agrupan la ‘m’ y el ‘ ’, ya que son los menos probables

1.2 Representación de mensajes



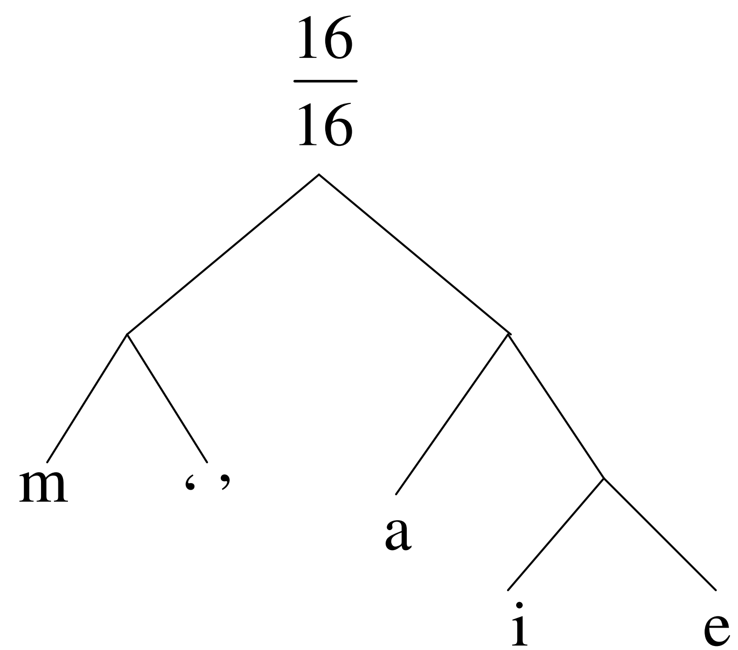
- Se agrupan los dos últimos que quedan

1.2 Representación de mensajes



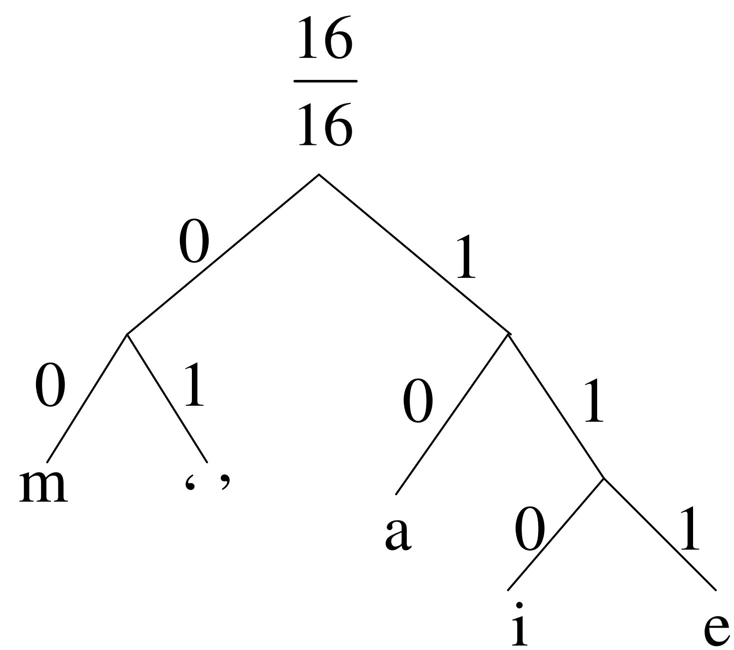
- Tenemos todos los símbolos agrupados en un árbol. Ahora hay que asignarles las secuencias de bits

1.2 Representación de mensajes



- Para esto, asignamos ‘1’ al ir hacia la derecha y ‘0’ al ir hacia la izquierda

1.2 Representación de mensajes



‘m’=00
‘ ’=01
‘a’=10
‘i’=110
‘e’=111

1.2 Representación de mensajes

‘m’=00 $P\{m\} = \frac{6}{16}$

‘ ’=01 $P\{\ \} = \frac{4}{16}$

‘a’=10 $P\{a\} = \frac{3}{16}$

‘i’=110 $P\{i\} = \frac{2}{16}$

‘e’=111 $P\{e\} = \frac{1}{16}$

- Se puede apreciar que los símbolos más probables recibieron secuencias de bits cortas, mientras que los menos probables recibieron secuencias de bits más largas
- De este modo, el mensaje queda codificado con la mínima cantidad de bits

1.2 Representación de mensajes

‘m’=00   ‘ ’=01   ‘a’=10   ‘i’=110   ‘e’=111

“mi_mama_me_mima”=
=0011001001000100100111010011000010

- La otra alternativa (la más obvia) era asignar el mismo largo a todas las secuencias de bits, sin embargo, el largo total del mensaje habría sido mayor.

1.3 Información

- La información asociada a un símbolo x se define del siguiente modo:

$$I(x) = \log_2 \frac{1}{P(x)} [bit]$$

- I(x) representa la mínima cantidad de bits necesaria para representar al símbolo x. Los símbolos menos probables tienen mayor información.
- Resulta interesante ver cómo se puede calcular la cantidad de información que contiene un mensaje dado

1.3 Información

- Supongamos que se tiene un mensaje de 3 símbolos independientes:

$$P\{(a,b,c)\} = P\{a\} \times P\{b\} \times P\{c\}$$

$$\frac{1}{P\{(a,b,c)\}} = \frac{1}{P\{a\}} \times \frac{1}{P\{b\}} \times \frac{1}{P\{c\}}$$

$$\log_2 \frac{1}{P\{(a,b,c)\}} = \log_2 \left(\frac{1}{P\{a\}} \times \frac{1}{P\{b\}} \times \frac{1}{P\{c\}} \right)$$

$$\log_2 \frac{1}{P\{(a,b,c)\}} = \log_2 \frac{1}{P\{a\}} + \log_2 \frac{1}{P\{b\}} + \log_2 \frac{1}{P\{c\}}$$

$$I(a,b,c) = I(a) + I(b) + I(c)$$

1.3 Información

$$I(a,b,c) = I(a) + I(b) + I(c)$$

- Se puede apreciar que la cantidad de información que contiene un mensaje es igual a la suma de la información que contiene cada símbolo.
- La información que contiene un mensaje representa la mínima cantidad de bits necesaria para representarlo

1.3 Información

- Ejemplo: Los símbolos A, B, C, D ocurren con probabilidad ½, ¼, 1/8 y 1/8 respectivamente. Calcular la información que contiene el mensaje "BDA"
  - Solución:
  - $I(A)=\log_2(1/(½))=\log_2(2)=1$[bit]
  - $I(B)=\log_2(4)=2$[bit]
  - $I(D)=\log_2(8)=3$[bit]
  - I("BDA")=2+3+1=6[bit]

1.3 Información

- Entropía: La entropía es la información que posee en promedio <u>un</u> símbolo que pasa por el canal

$$H = E\big(I(x)\big) = \sum_{i=1}^{N} P(x_i) I(x_i) = \sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} [bit]$$

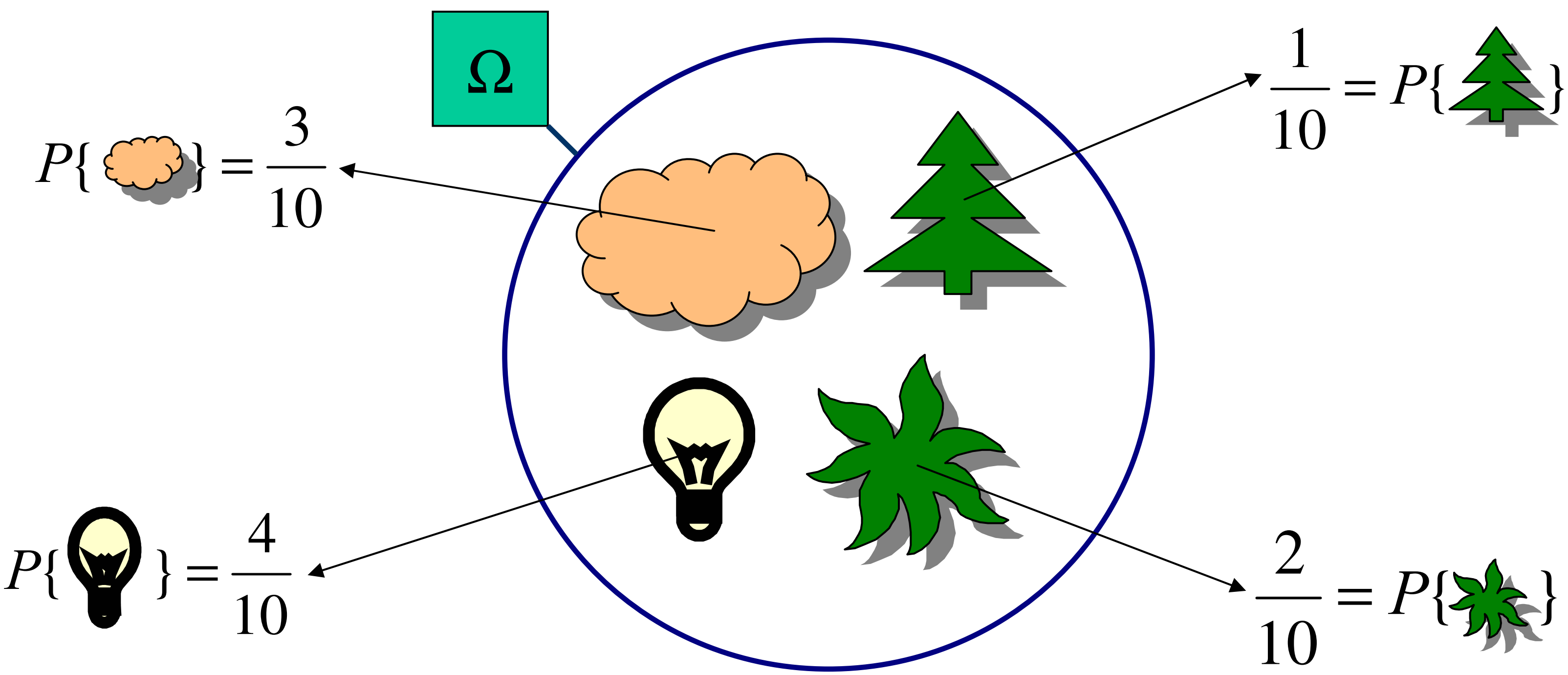
- La tasa de transmisión de información es igual a

$$R = rH[bps]$$

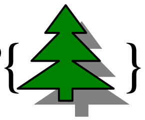
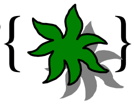
- Donde r es la tasa de símbolos (símbolos/segundo)

1.3 Información

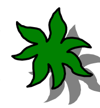
- Ejemplo: calcular la entropía del conjunto Ω.



1.3 Información

$P\{$  $\} = \frac{1}{10}$ $P\{$  $\} = \frac{2}{10}$ $P\{$  $\} = \frac{3}{10}$ $P\{$  $\} = \frac{4}{10}$

$I($  $) = \log_2 \frac{1}{\frac{1}{10}} = \log_2 10 = 3.322$

$I($  $) = \log_2 \frac{1}{\frac{2}{10}} = \log_2 5 = 2.322$

$I($  $) = \log_2 \frac{1}{\frac{3}{10}} = \log_2 \frac{10}{3} = 1.737$

$I($  $) = \log_2 \frac{1}{\frac{4}{10}} = \log_2 \frac{5}{2} = 1.322$

$$H = \frac{1}{10}\times 3.322 + \frac{2}{10}\times 2.322 + \frac{3}{10}\times 1.737 + \frac{4}{10}\times 1.322$$

$$H = 1.8465[bit]$$

1.4 Capacidad de canal

- Representa la máxima tasa de información que se puede transmitir por un canal (en bits por segundo).

- No depende de si la información es análoga o digital.

- Los canales generalmente se caracterizan por su ancho de banda (en Hertz) y la cantidad de ruido. Como referencia se utiliza el ruido blanco Gaussiano (WGN, *White Gaussian Noise*).

1.4 Capacidad de canal

- El teorema de Hartley-Shannon relaciona la capacidad máxima teórica del canal con el ancho de banda (en Hz) y la razón señal a ruido:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

C : capacidad del canal [bps]

B : ancho de banda [Hz]

S/N : razón señal a ruido (no SNR)

1.4 Capacidad de canal

- En el caso de un canal ideal sin ruido se puede ocupar la fórmula de Nyquist:

$$C = 2B\log_2 L$$

- donde L es el número de niveles de cuantización.