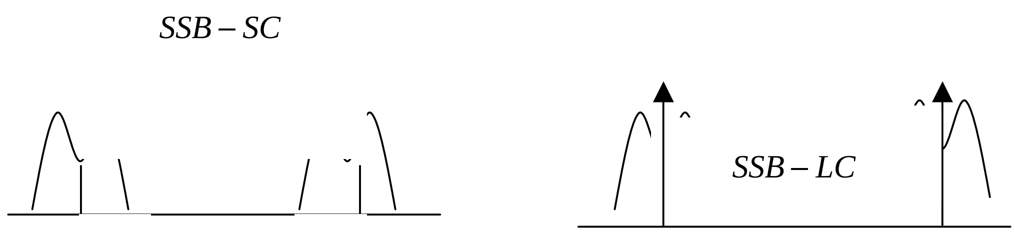
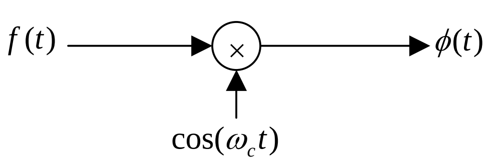
Auxiliar: Modulación de señales (AM y FM)

(i) Modulación de amplitud: puede ser:

* con banda lateral doble (DSB, double side-band) o simple (SSB, single side-band)
* con portadora suprimida (SC, supressed carrier) o grande (LC, large carrier)



Modulación DSB-SC

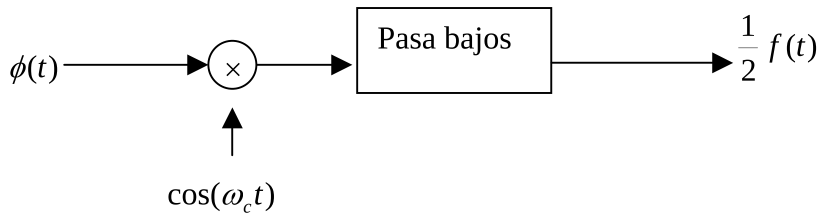


$$\phi(t) = f(t)\cos(\omega_c t)$$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega-\omega_c) + \frac{1}{2}F(\omega+\omega_c)$$

con f(t) de media cero.

Demodulación DSB-SC simple



$$\phi(t)\cos(\omega_c t) = f(t)\cos(\omega_c t)\cos(\omega_c t)$$

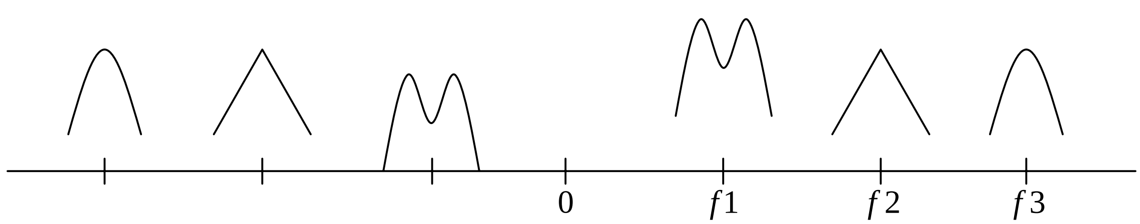
notar que $\cos(X)\cos(Y) = \frac{1}{2}\cos(X+Y) + \frac{1}{2}\cos(X-Y)$ (sale de: $\cos(X) = \frac{1}{2}e^{jX} + \frac{1}{2}e^{-jX}$)

luego $\phi(t)\cos(\omega_c t) = f(t)\cos(\omega_c t)\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}f(t)\cos(2\omega_c t)$

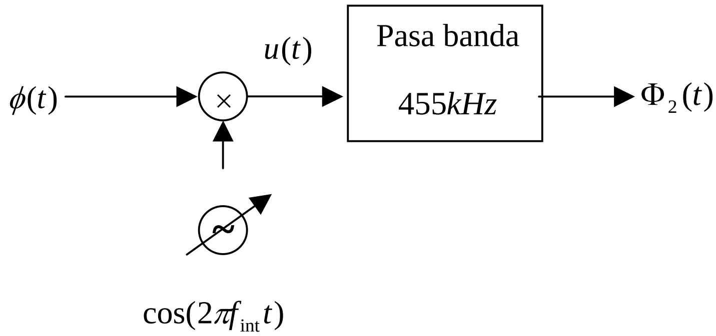
y al aplicar el pasabajos queda sólo el primer término.

Receptor heterodino (receptor típico de radio)

Supongamos que se tiene un espectro con varias señales moduladas en distintas frecuencias (como sucede con las ondas de radio):



Llamemos a la señal de onda de radio $\phi(t)$. Esta señal contiene todas las señales mostradas multiplexadas a distintas frecuencias. Queremos dejar pasar sólo la señal que está en torno a $f3$. Un esquema usado es el siguiente:



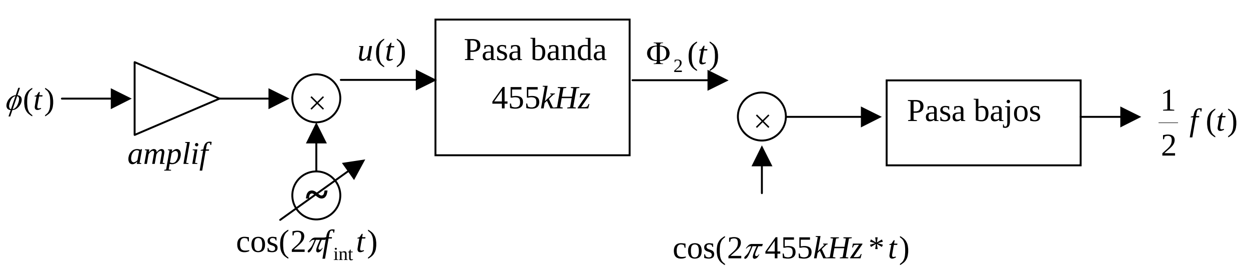
El filtro pasa banda está fijo en una frecuencia de 455 kHz (hacer filtros móviles es complicado), lo que permite que tenga un muy buen desempeño (deja pasar sólo una señal modulada)

Supongamos que se quiere seleccionar la señal que está en torno a $f3$=1055 kHz. Para ello, se debe seleccionar f_{int} = 1055 kHz – 455 kHz = 600 kHz. ¿Por qué?.

$$U(w) = \frac{1}{2}\Phi(\omega + 2\pi f_{\text{int}}) + \frac{1}{2}\Phi(\omega - 2\pi f_{\text{int}})$$

es decir, u(t) contiene las mismas frecuencias que $\phi(t)$, pero desplazadas en $2\pi f_{\text{int}}$. Luego, las frecuencias f de $\phi(t)$ que se dejan pasar son aquellas que cumplen $f+f_{int}$=455kHz y las que cumplen $f-f_{int}$=455 kHz.

Luego, $\phi 2(t)$ es una señal centrada en 455 kHz, y puede demodularse con el demodulador mostrado en la página anterior. El esquema final es:



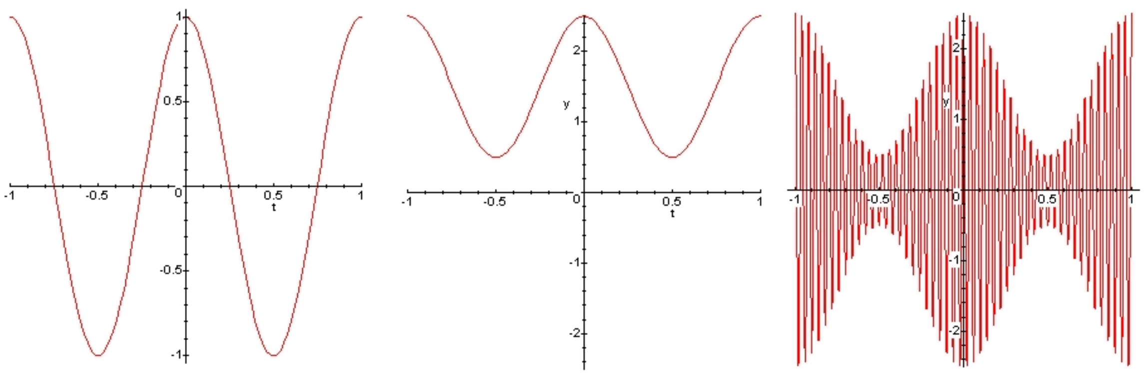
DSB-LC (AM comercial)

Aquí, antes de multiplicar la señal por el coseno, se le suma una constante o bias.

$\phi_{\mathrm{AM}}(t) = \left(A + f(t)\right)\cos(\omega_c t) = A\cos(\omega_c t) + f(t)\cos(\omega_c t)$, con f(t) de media cero.

La señal f(t) debe tener una amplitud mayor que A, ya que un requisito para la transmisión AM comercial es que la señal (A+f(t)) debe ser mayor que cero para todo t.

La señal en el tiempo se ve así:



$f(t)$ $\quad$ $A + f(t)$ $\quad$ $\left(A + f(t)\right)\cos(\omega_c t)$

Luego, una señal de AM comercial se puede demodular simplemente usando un detector de envolvente.

Se puede analizar qué sucede con la potencia que se invierte en modular una señal AM

$$\phi_{AM}(t) = A\cos(\omega_c t) + f(t)\cos(\omega_c t)$$

$$\phi_{AM}{}^2(t) = A^2\cos^2(\omega_c t) + f(t)^2\cos^2(\omega_c t) + 2Af(t)\cos^2(\omega_c t)$$

$$\phi_{AM}{}^2(t) = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A^2\cos(2\omega_c t) + \frac{1}{2}f(t)^2 + \frac{1}{2}f(t)^2\cos(2\omega_c t) + Af(t) + Af(t)\cos(2\omega_c t)$$

Ahora se sacará el valor medio de esto. Se debe notar que, si f(t) tiene sólo componentes de frecuencia menores a ω_c

$prom\left(\frac{1}{2}f^2(t)\cos(2\omega_c t)\right)=0$ ya que $\cos(2w_c t)$ y $f^2(t)$ no tienen frecuencias en común

$prom\left(Af(t)\cos(2\omega_c t)\right)=0$ ya que f(t) y $\cos(2w_c t)$ no tienen frecuencias en común

La cosa es que se obtiene:

$$prom\left(\phi_{AM}{}^2(t)\right)=\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{2}prom\left(f(t)^2\right)$$

Se debe notar que $prom\left(\phi_{AM}{}^2(t)\right)$ es la potencia promedio de la señal AM, mientras que $prom\left(f(t)^2\right)$ es la potencia promedio de f(t), y A^2 es la potencia del bias que se le sumó a f(t).

Luego, se puede establecer una relación de eficiencia en el uso de la potencia:

$$\mu=\frac{\frac{1}{2}prom\left(f^2(t)\right)}{\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{2}prom\left(f^2(t)\right)}=\frac{prom\left(f^2(t)\right)}{A^2+prom\left(f^2(t)\right)}$$

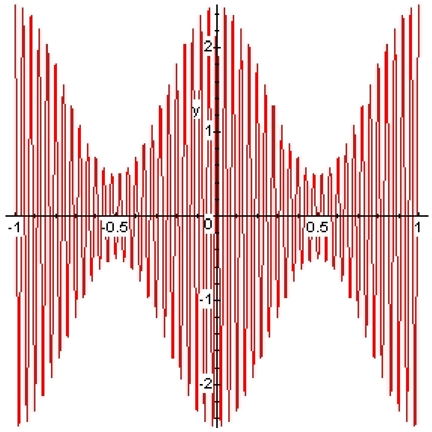
En el caso de que f(t) sea una señal sinusoidal:

$$f(t)=Am\cos(\omega_c t) \Rightarrow \mu=\frac{\frac{1}{2}A^2m^2}{A^2+\frac{1}{2}A^2m^2}=\frac{m^2}{2+m^2}$$, m: índice de modulación

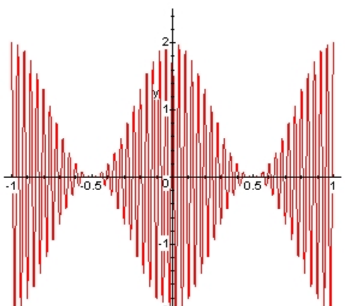
En el caso de que f(t) no sea sinusoidal, también se puede calcular un índice m:

$\max\left(A + f(t)\right)$

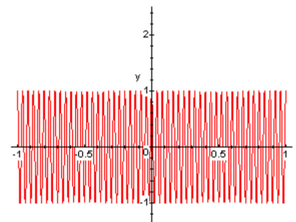
$\min\left(A + f(t)\right)$



$$m = \frac{\max\left(A + f(t)\right) - \min\left(A + f(t)\right)}{\max\left(A + f(t)\right) + \min\left(A + f(t)\right)} \times 100\%$$



m=1



m=0

Modulación de amplitud por cuadratura (QAM)

Modular por cuadratura es usar tanto cos() como sen() para modular, por lo que se pueden modular 2 señales en una misma frecuencia portadora:

En el caso DSB-SC:

$$\phi(t) = f_1(t)\cos(\omega_c t) + f_2(t) sen(\omega_c t)$$

Para recuperar la señal f_1(t), se debe demodular multiplicando $\phi(t)$ por $\cos(\omega_c t)$, y para recuperar f_2(t) se debe demodular multiplicando por $sen(\omega_c t)$. Esto se debe a que cos(w_0t) y sen(w_0t) forman una base ortogonal.

También se puede hacer lo mismo en los demás tipos de modulación de amplitud, por ejemplo:

$$\phi_{QAM}(t) = f_1(t)\cos(\omega_c t) + f_2(t) sen(\omega_c t) + A\cos(\omega_c t)$$

SSB-SC

En este formato, se ocupa la mitad del ancho de banda para transmitir una señal que el que se ocupa en los tipos anteriores de modulación (ver gráficos del inicio)

Para modular f(t) en este formato se debe calcular:

$$\Phi_{SSB}(t) = f(t)\cos\omega_c t - \hat{f}(t) sen\omega_c t$$

donde $\hat{f}(t)$ se calcula a partie de la transformada inversa de:

$$\hat{F}(\omega) = -jF(\omega) * signo(\omega)$$

$$\hat{F}(\omega) = -jF(\omega) * signo(\omega)$$

Este formato es difícil de implementar, por lo que se ocupa en casos en que se requiere un gran ahorro de ancho de banda.

Problema 1

Las señales de entrada

$$x(t) = A\cos(\omega_1 t) + B\cos(\omega_2 t)$$
$$y(t) = C\cos(\omega_3 t)$$

con $w_3 > w_2 > w_1$

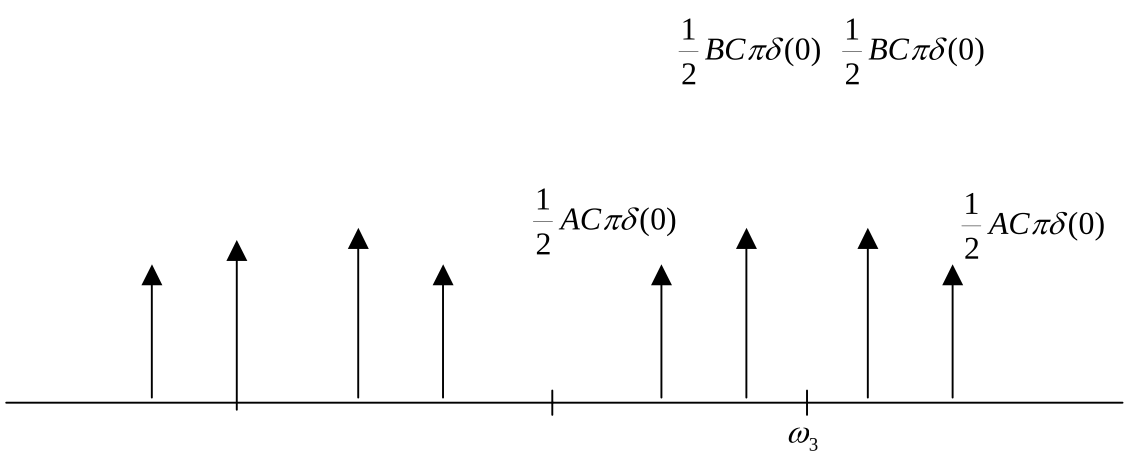
se aplican a un multiplicador. Dibujar la densidad espectral de salida para x(t)y(t) y para x(t)x(t).

$$x(t)y(t) = \left(A\cos(\omega_1 t) + B\cos(\omega_2 t)\right)C\cos(\omega_3 t)$$
$$x(t)y(t) = AC\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_3 t) + BC\cos(\omega_2 t)\cos(\omega_3 t)$$

Usando la propiedad $\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2}\cos\left((\omega_1+\omega_2)t\right) + \frac{1}{2}\cos\left((\omega_1-\omega_2)t\right)$ de modulación de la función coseno por sí misma, se llega a:

$$x(t)y(t) = \frac{1}{2}AC\cos(\omega_3+\omega_1)t + \frac{1}{2}AC\cos(\omega_3-\omega_1)t + \frac{1}{2}BC\cos(\omega_3+\omega_2)t + \frac{1}{2}BC\cos(\omega_3-\omega_2)t$$

como $\cos(\omega_0 t) \to \pi\delta(\omega+\omega_0) + \pi\delta(\omega-\omega_0)$, se obtiene:



Recordar que el espectro es simétrico:

$F(-\omega) = F^*(\omega)$

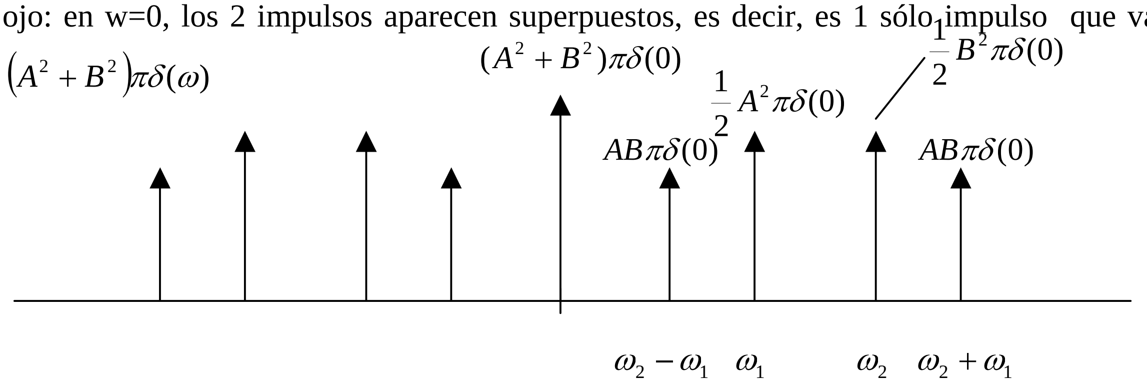
Ahora se calculará x(t)x(t)

$$x(t)x(t) = A^2\cos^2\omega_1 t + 2AB\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) + B^2\cos^2\omega_2 t$$

$$x(t)x(t) = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A^2\cos(2\omega_1 t) + AB\cos((\omega_2-\omega_1)t) + AB\cos((\omega_2+\omega_1)t) + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}B^2\cos(2\omega_2 t)$$

Ahora aparecen impulsos en $2w_1$, w_2-w_1, w_2+w_1 y $2w_2$, y en w=0

ojo: en w=0, los 2 impulsos aparecen superpuestos, es decir, es 1 sólo impulso que vale $(A^2+B^2)\pi\delta(\omega)$



Problema 2

Un trasmisor AM recibe una señal:

f(t) $= 5\cos(\omega_m t)$ en volts

Luego de atenuarla multiplicándola por una constante K, le suma un bias de 1 y se multiplica la salida del sumador por Acos(w_ct). Se observa que el tamaño de cada impulso lateral es un 40% del central. Además se sabe que cuando f(t) tiene amplitud cero, la señal disipa una potencia media de 1kW a través de una resistencia de 50 Ω. Determinar el índice de modulación m y el tamaño de los impulsos central y laterales.

Primero se debe escribir la señal modulada de un modo adecuado según lo indicado:

$\Phi(t) = A(1 + Kf(t))\cos(\omega_c t)$, reemplazando f(t)

$$\Phi(t) = A(1 + Kf(t))\cos(\omega_c t)$$
$$\Phi(t) = A(1 + K * 5\cos(\omega_m)t)\cos(\omega_c t),\ \text{ se aprecia que m=5*K}$$
$$\Phi(t) = A(1 + m\cos(\omega_m)t)\cos(\omega_c t)$$

Luego de dejarla escrita en la forma típica, se puede seguir más fácilmente

$$\Phi(t) = A\cos(\omega_c t) + \frac{1}{2}Am\cos(\omega_c + \omega_m)t + \frac{1}{2}Am\cos(\omega_c - \omega_m)t$$

$$40\% = \frac{\frac{1}{2}Am\pi\delta(0)}{A\pi\delta(0)} \Rightarrow m = 0.8, \text{ luego ya tenemos m. Falta A}$$

Cuando f(t)=0, $\phi(t) = A\cos(\omega_c t)$ en volts, y disipa 1000W sobre 50 Ω

La potencia disipada promedio es:

$$\frac{prom(\phi^2(t))}{R} = \frac{prom((A\cos(\omega_c t))^2)}{50\Omega} = \frac{\frac{1}{2}A^2}{50\Omega} = 1000W \Rightarrow A^2 = 100000V^2 \Rightarrow A = \sqrt{100000}[V]$$

Modulación de fase

$$\phi_{PM}(t) = A\left(\cos\omega_c t + K_p f(t)\right)$$
$$\phi_{FM}(t) = A\cos\left(\omega_c t + K_f \int_0^t f(\tau)d\tau\right)$$

En PM la señal f(t) corresponde a la fase de la sinusoide. En cambio, en FM la señal se suma a la frecuencia de la sinusoide. La frecuencia instantánea para la señal FM es la derivada de lo que está adentro del coseno, es decir:

$$\omega_{FM}(t) = \omega_c + K_f f(t)$$

FM de banda angosta

Es una simplificación de la fórmula para modulación FM.

Supongamos que f(t) es una sinusoide $f(t) = a\cos(\omega_m t)$

=> $\phi_{FM}(t) = A\cos\left(\omega_c t + K_f \int_0^t a\cos(\omega_m \tau)d\tau\right) = A\cos\left(\omega_c t + \frac{K_f a}{\omega_m} sen(\omega_m t)\right)$

y $\omega_{FM}(t) = \omega_c + K_f a\cos(\omega_m t)$

Se define:

$\Delta\omega = K_f a$: desviación peak de frecuencia

$\beta = \frac{K_f a}{\omega_m}$: índice de modulación para FM

Entonces se pueden reescribir las fórmulas:

$$\omega_{FM}(t) = \omega_c + \Delta\omega\cos(\omega_m t)$$
$$\phi_{FM}(t) = A\cos\left(\omega_c t + \beta sen(\omega_m t)\right)$$

Se puede usar la fórmula del ángulo doble cos(a+b)=cos(a)cos(b)-sen(a)sen(b)

$$\Phi_{FM}(t) = A\cos(\omega_c t)\cos(\beta sen\omega_m t) - Asen(\omega_c t)sen(\beta sen\omega_m t)$$

$$\Phi_{FM}(t) = A\cos(\omega_c t)\cos(\beta sen\omega_m t) - Asen(\omega_c t)sen(\beta sen\omega_m t)$$

Si suponemos que f(t) es pequeña (es decir, que $a\cos(\omega_m t)$ es pequeña) se concluye que β debe ser pequeña. Para β pequeña se cumple:

$$\cos(\beta sen\omega_m t) \approx 1$$
$$sen(\beta sen\omega_m t) \approx \beta sen\omega_m t$$

con lo que se obtiene la fórmula de FM banda angosta (NBFM):

$$\phi_{NBFM}(t) = A\cos(\omega_c t) - \beta Asen(\omega_c t)sen(\omega_m t)$$

Se debe notar que esta fórmula se parece a la de AM comercial:

$$\phi_{AM}(t) = A\cos(\omega_c t) - mA\cos(\omega_c t)\cos(\omega_m t)$$

sin embargo, en el caso de FM, el impulso no es “paralelo” a la señal modulada, sinó “perpendicular”, y no se puede usar detector de envolvente para demodularla directamente.

FM de banda ancha

Aquí se analiza el espectro de la señal FM "valientemente", sin hacer simplificaciones de β pequeño.

Si f(t) es una señal sinusoidal, $f(t) = a\cos(\omega_m t)$, se tiene

$$\phi_{FM}(t) = A\cos\left(\omega_c t + K_f \int_0^t f(\tau)d\tau\right) \Rightarrow \phi_{FM}(t) == A\cos(\omega_c t + \beta sen(\omega_m t))$$

Esto se puede reescribir como:

$$\phi_{FM}(t) = \mathrm{Re}\left(e^{j(\omega_c t + \beta sen(\omega_m t))}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{j\omega_c t} e^{\beta sen(\omega_m t)}\right)$$

$e^{j\beta sen(\omega_m t)}$ es una señal periódica de periodo w_m, por lo que se puede expandir en serie de Fourier:

$$\Phi_{FM}(t) = \mathrm{Re}\left(e^{j\omega_c t} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_m t}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_m t + j\omega_c t}\right)$$

$$\Phi_{FM}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cos(\omega_c + n\omega_m)t$$

con $F_n = J_n(\beta)$, la función J de Bessel de orden n. Estas funciones se hacen más pequeñas cuando $n \to \infty$ para un β fijo, pero sin hacerse cero.

Luego, se puede apreciar que la modulación FM es como una infinidad de modulaciones AM que llenan todo el espectro. Sin embargo, los términos con n=0, n=1 y n=-1 son los que tienen real importancia, ya que, para la transmisiones FM comerciales, estos 3 términos cubren sobre el 90% de la potencia total. Los demás términos son muy pequeños, aunque igual existen.

Una propiedad útil es que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^{\,2}(\beta) = 1$$

lo que permite probar que la potencia de una señal FM es constante e igual a $A^2/2$.

El ancho de banda donde está la mayoría de la potencia de la señal está dado aproximadamente por la fórmula de Carson:

$$W = 2(\omega_m + \Delta w)$$

con el Δw indicado anteriormente.

Problema 3

Se ingresa la señal $f(t) = \cos(2000\pi t)$ a un modulador FM, lo que da como señal modulada:

$$\phi_{FM}(t) = \cos(2\pi * 10^7 + 4sen(2000\pi t))$$

Calcular la desviación peak de frecuencia y el ancho de banda según Carson

$$\frac{\Delta w}{\omega_m} = \beta, \beta = 4, \omega_m = 2000\pi$$

$=> \Delta\omega = 4 * 2000 = 8000\pi$ (desviación de frecuencia)

$W = 2(\omega_m + \Delta\omega) = 2*(2000\pi + 8000\pi) = 20000\pi$ (ancho de banda)