Auxiliar de correlación temporal.

a) Densidad espectral de energía: Está dada por el teorema de Parseval

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = E$$

Se debe notar que $|F(\omega)|^2$ es una densidad espectral de energía, ya que al calcular su integral se obtiene una energía.

b) Densidad espectral de potencia: No se debe confundir con la anterior. La idea es poder determinar una función $S_f(\omega)$ cuya integral en el dominio de la frecuencia dé cómo resultado la <u>potencia media</u> de la señal f(t):

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \overline{|f(t)|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty} S_f(\omega)d\omega = P$$

Para poder determinar la densidad espectral de potencia se debe definir la autocorrelación temporal de f(t):

$$R_f(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^*(t) f(t+\tau)dt = \overline{f^*(t) f(t+\tau)}$$

Se puede apreciar que $R_f(0)$ es igual a la potencia media de la señal f(t), por lo que su valor es siempre positivo.

La autocorrelación temporal y la densidad de potencia espectral están relacionadas por:

$$\Im\{R_f(\tau)\} = S_f(\omega)$$

Es decir, la transformada de Fourier de la autocorrelación de una señal da como resultado su densidad de potencia espectral.

Para las señales que no tienen densidad espectral de energía (por tener energía infinita) se calcula la densidad espectral de potencia. Usualmente las señales que tienen energía infinita son aquellas que existen para todo t (por ejemplo, las señales periódicas).

Otras definiciones:

$R_{fg}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^*(t)g(t+\tau)dt = \overline{f^*(t)g(t+\tau)}$: correlación cruzada

$\overline{f(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$: valor medio

$\sigma(t) = f(t) - \overline{f(t)}$: componente alterna o de c.a.

Ruido blanco

El ruido blanco n(t) es una señal "ideal" (no se puede producir en la realidad) que tiene las siguientes propiedades:

$\overline{n(t)} = 0$: tiene valor medio cero

$S_n(\omega) = \frac{\eta}{2}$: Su espectro de potencia está distribuido uniformemente en el dominio de la frecuencia y tiene un ancho de banda infinito. η es una constante que indica cuánta potencia por Hz tiene el ruido.

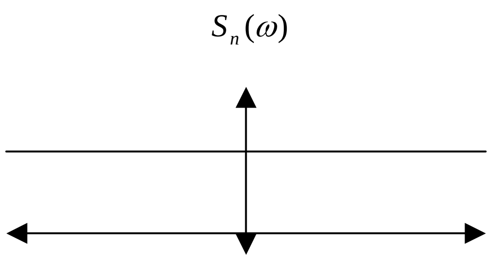
La potencia del ruido blanco contenida en una banda de frecuencia (ω_1, ω_2) es:

$$P_{\omega1,\omega2} = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=\omega1}^{\omega2} S_n(\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\omega2}^{\omega1} S_n(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}(\omega2-\omega1)\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\pi}(\omega2-\omega1)\frac{\eta}{2} = \frac{1}{2\pi}\eta(\omega2-\omega1)$$

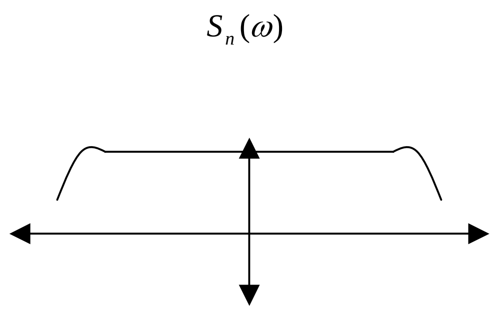
NOTA: Se debe apreciar que para obtener la potencia en una banda de frecuencias se debe integrar tanto sobre las potencias negativas como sobre las positivas.

Además, $R_n(\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(t)$, es decir, los puntos consecutivos del ruido blanco no tienen ningún grado de correlación, y su potencia media $R_n(0)$ es infinita.

Para aproximar el ruido blanco ideal se puede generar ruido blanco de banda limitada, el cual tiene densidad espectral de potencia constante en un cierto ancho de banda grande, pero limitado.

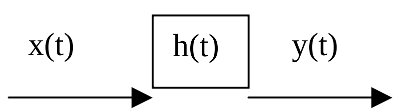


Ruido blanco ideal



Ruido blanco de banda limitada

Análisis del filtrado usando correlación



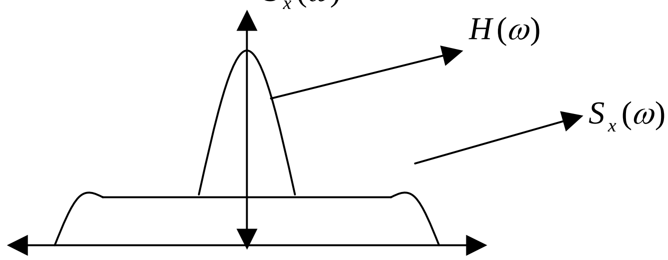
Al filtrar la señal se cumplen las siguientes relaciones:

$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$ en el dominio del tiempo

$S_y(\omega) = S_x(\omega)|H(\omega)|^2$ en el dominio de la frecuencia

Si el ancho de banda de $S_x(\omega)$ es mayor que el de $|H(\omega)|^2$, entonces es posible determinar el filtro mediante la relación:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)}$$



Esta relación permite obtener el diagrama de amplitud del filtro, pero no su diagrama de fase.

Ejercicio 1

Se tiene una señal f(t) con la siguiente densidad espectral de potencia:

$$S_f(\omega) = \left[\frac{1}{1+\omega^2} + \delta(\omega-2) + \delta(w+2)\right]$$

Determinar la potencia media de f(t)

Solución: Una forma es en el dominio de la frecuencia

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{1+\omega^2} + \delta(\omega-2) + \delta(w+2)\right]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}d\omega + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$$

Haciendo el cambio de variables $\omega = tg(u) \Rightarrow d\omega = \sec^2(u)$. Además los límites de integración cambian de $\omega \in (-\infty,\infty)$ a $u \in (-\pi/2, \pi/2)$.

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+tg^2 u}\sec^2 u\, du + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+tg^2 u}\sec^2 u\, du + \frac{1}{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sec^2 u}\sec^2 u\, du + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$$

Otra forma (más dificultosa) habría sido calcular $R_f(0)$.

Ejercicio 2

Se tiene una señal $f(t) = 4\cos(20\pi t) + 2\cos(30\pi t)$. Calcular su correlación temporal, su potencia media y su densidad espectral de potencia.

$$R_f(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(4\cos(20\pi t) + 2\cos(30\pi t)\right)\left(4\cos(20\pi(t+\tau)) + 2\cos(30\pi(t+\tau))\right)dt$$

Usando la notación para el promedio (es sólo un cambio de notación):

$$R_f(\tau) = \overline{\left(4\cos(20\pi t) + 2\cos(30\pi t)\right)\left(4\cos(20\pi(t+\tau)) + 2\cos(30\pi(t+\tau))\right)}$$

$$\begin{aligned} R_f(\tau) = &\ \overline{16\cos(20\pi t)\cos\left(20\pi(t+\tau)\right)} + \overline{8\cos(20\pi t)\cos\left(30\pi(t+\tau)\right)} + \\ &+ \overline{8\cos(30\pi t)\cos\left(20\pi(t+\tau)\right)} + \overline{4\cos(30\pi t)\cos\left(30\pi(t+\tau)\right)} \end{aligned}$$

Se debe notar que quedan 4 términos que no pueden integrarse directamente.

El siguiente paso es transformar la multiplicación de 2 sinusoides en una sola. Para ello se puede ocupar la forma compleja de las sinusoides:

$$\cos(at)\cos(b(t+\tau)) = \left(\frac{1}{2}e^{jat} + \frac{1}{2}e^{-jat}\right)\left(\frac{1}{2}e^{jb(t+\tau)} + \frac{1}{2}e^{-jb(t+\tau)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}e^{j\left(at+b(t+\tau)\right)} + \frac{1}{4}e^{j\left(at-b(t+\tau)\right)} + \frac{1}{4}e^{-j\left(at-b(t+\tau)\right)} + \frac{1}{4}e^{-j\left(at+b(t+\tau)\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\left(at + b(t+\tau)\right) + \frac{1}{2}\cos\left(at - b(t+\tau)\right)$$

Luego, podemos analizar los 4 términos:

$$\overline{16\cos(20\pi t)\cos\left(20\pi(t+\tau)\right)} = \overline{8\cos(20\pi t + 20\pi(t+\tau)) + 8\cos(20\pi t - 20\pi(t+\tau))} = 8\cos(20\pi\tau)$$

$$\overline{8\cos(20\pi t)\cos\left(30\pi(t+\tau)\right)} = \overline{4\cos(20\pi t + 30\pi(t+\tau)) + 4\cos(20\pi t - 30\pi(t+\tau))} = 0$$

$$\overline{8\cos(30\pi t)\cos\left(20\pi(t+\tau)\right)} = \overline{4\cos(30\pi t + 20\pi(t+\tau)) + 4\cos(30\pi t - 20\pi(t+\tau))} = 0$$

$$\overline{4\cos(30\pi t)\cos\left(30\pi(t+\tau)\right)} = \overline{2\cos(30\pi t + 30\pi(t+\tau)) + 2\cos(30\pi t - 30\pi(t+\tau))} = 2\cos(30\pi\tau)$$

Luego se obtiene:

$$R_f(\tau) = 8\cos(20\pi\tau) + 2\cos(30\pi\tau)$$

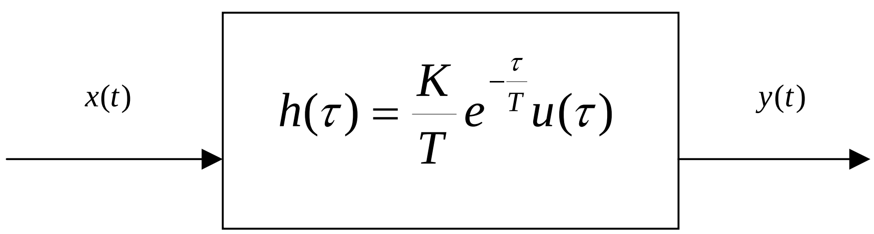
Se puede observar además que:

$$R_{\{4\cos(20\pi t)+2\cos(30\pi t)\}}(\tau) = R_{\{4\cos(20\pi t)\}}(\tau) + R_{\{2\cos(30\pi t)\}}(\tau)$$

lo que ocurre porque $4\cos(20\pi t)$ y $2\cos(30\pi t)$ no tienen frecuencias en común, es decir, no están correlacionados entre sí.

Ejercicio 3

Encontrar $R_y(\tau)$ para el siguiente sistema:



con T>0 obviamente.

Se sabe que la entrada es un ruido caracterizado por $R_x(\tau) = R_0\delta(\tau)$ y media cero.

Desarrollo: Se sabe que $S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$

$$H(\omega) = \frac{K}{T}\Im\left(e^{-\frac{\tau}{T}}u(\tau)\right) = \frac{K}{j\omega T + 1}$$

$$\Rightarrow |H(\omega)|^2 = \frac{K^2}{\omega^2 T^2 + 1}$$

y $S_x(\omega) = \Im(R_0\delta(\tau)) = R_0$. Luego:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) = R_0\frac{K^2}{\omega^2 T^2 + 1}$$

$$R_y(\tau) = \Im^{-1}\left(R_0\frac{K^2}{\omega^2 T^2 + 1}\right) = R_0\frac{K^2}{2T}\Im^{-1}\left(\frac{2\frac{1}{T}}{1+\left(\frac{1}{T}\right)^2}\right) = R_0\frac{K^2}{2T}e^{-\frac{|\tau|}{T}}$$

Ejercicio 4

Dada una señal y(t) con autocorrelación $R_y(\tau) = R_0\frac{K^2}{2T}e^{-\frac{|\tau|}{T}}$ y con media $\overline{y}$ conocida, encontrar su potencia alterna $\overline{\sigma^2(t)}$

$$\sigma(t) = y(t) - \overline{y} \Rightarrow \overline{\sigma^2(t)} = \overline{\left(y(t) - \overline{y}\right)^2} = \overline{y(t)^2} - \overline{2y(t)\overline{y}} + \overline{y}^2$$

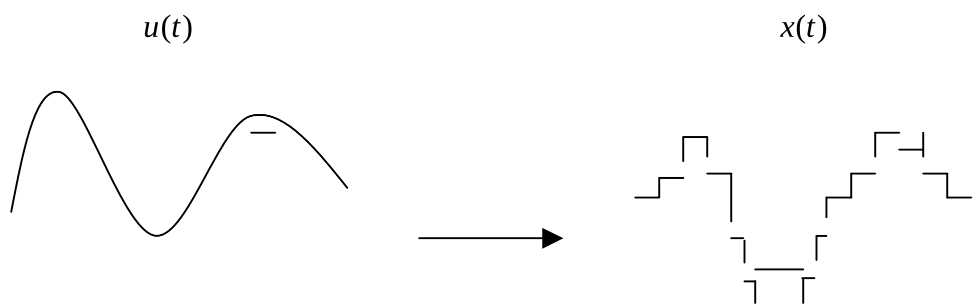
$$\overline{\sigma^2(t)} = \overline{y(t)^2} - 2\overline{y}\,\overline{y} + \overline{y}^2 = \overline{y(t)^2} - \overline{y}^2 = Ry(0) - \overline{y}^2 = R_0\frac{K^2}{2T} - \overline{y}^2$$

Cuantización

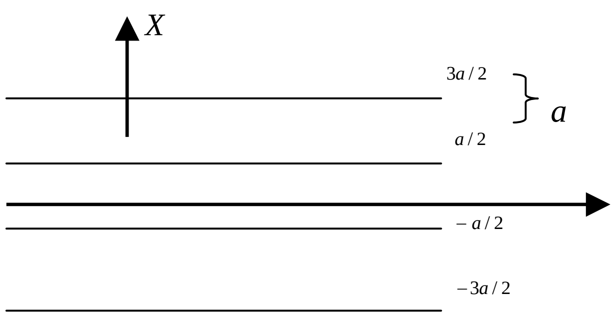
La idea de cuantización consiste en transformar una señal continua en otra que tenga un número fijo de amplitudes posibles. La cantidad de niveles de amplitud que puede tener la señal cuantizada se denomina número de niveles de cuantización. Se debe notar que cuantizar una señal no es lo mismo que muestrearla: la señal cuantizada no es de tiempo discreto sino de tiempo continuo.

Como los valores de la señal de salida son finitos, es posible codificar la amplitud con un número fijo de bits que depende de la cantidad de niveles empleados.

Una señal que ha sido cuantizada y muestreada se denomina señal digital.



Consideremos un sistema con n niveles de cuantización (n par). La separación entre 2 niveles de cuantización es a.



Ejemplo: 4 niveles de cuantización

niveles: $-\frac{3a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{3a}{2}$

Cuando se ingresa una señal de entrada u(t) al cuantizador, éste genera una señal de salida x(t) tal que, para cada t, x(t) es igual al nivel más cercano a u(t).

La señal de entrada u(t) puede tomar cualquier valor entre –n/2 y n/2, mientras que la señal cuantizada x(t) sólo puede tomar ciertos valores $\pm\frac{ai}{2}$ con $i \in \{1,3,...,n-1\}$. El error cometido al aproximar u(t) por x(t) se llama error de cuantización.

Se debe notar que el error de cuantización siempre está entre $-\frac{a}{2}$ y $\frac{a}{2}$ porque la separación entre dos niveles de cuantización es a. El máximo error de cuantización se produce cuando la entrada u(t) está justo en la mitad entre 2 niveles de cuantización.

Cálculo de la razón señal a ruido:

Se supondrá que u(t) está uniformemente distribuido en el rango $-\frac{na}{2},\frac{na}{2}$.

Si esto se cumple, entonces x(t) puede tomar cualquiera de los niveles permitidos con igual probabilidad.

La densidad de probabilidad de que la salida x(t) tome un cierto valor x en algún instante t está dada por:

$$p(x) = \sum_{\substack{i=-n \\ i\ impar}}^{n} \frac{1}{n}\delta\left(x - \frac{ia}{2}\right)$$

Se debe notar que la integral de p(x) entre menos infinito e infinito da 1, ya que la sumatoria está compuesta por n términos.

La potencia de la señal u(t) es:

$$S = \int_{x=-\infty}^{\infty} p(x) * x^2 = \int_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{i=-n \\ i\ impar}}^{n} \frac{1}{n}\delta\left(x - \frac{ia}{2}\right) * x^2 = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{\infty} \sum_{\substack{i=-n \\ i\ impar}}^{n} \frac{1}{n}\delta\left(x - \frac{ia}{2}\right) * x^2$$

$$S = \frac{2}{n}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{(n-1)a}{2}\right)^2\right) = \frac{2}{n}\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(1^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right) = \frac{n^2 - 1}{12}a^2$$

La densidad de probabilidad de que el ruido n(t) tome un cierto valor ε en algún instante t está dada por:

$$p(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & si\ -\dfrac{a}{2} \le \varepsilon \le \dfrac{a}{2} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La potencia del ruido es:

$$N = \int_{\varepsilon=-\infty}^{\infty} p(\varepsilon) * \varepsilon^2 d\varepsilon = \int_{\varepsilon=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{a} d\varepsilon = \frac{a^2}{12}$$

Si se supone que u(t) está uniformemente distribuida en el rango $-\frac{na}{2}, \frac{na}{2}$, entonces la razón entre la potencia de la señal (S) y la del ruido (N) vale:

$$\frac{S}{N} = n^2 - 1 \approx n^2$$ con n el número de bits.

Si se considera que los n niveles se codifican usando m bits, se puede establecer la relación

$$n = 2^m$$

$$\frac{S}{N} = (2^m)^2 - 1 \approx 2^{2m} = 4^m$$

$$\Rightarrow N \approx \frac{S}{4^m} \Rightarrow N \approx \left(\frac{1}{4}\right)^m S$$

Luego, se puede apreciar que por cada bit adicional que se use para la cuantización, la potencia del ruido va a disminuir en ¼ respecto de la potencia de la señal.

Esta misma relación puede pasarse a [dB]:

$$\frac{S}{N} = 4^m \Rightarrow \frac{S}{N} = 10\log(4^m)[dB] = m * 10\log(4)[dB] = m * 6[dB]$$

Luego, puede decirse también que por cada bit adicional que se use para la cuantización, la potencia de la señal va a ganar 6[dB] más por sobre la potencia del ruido.

Es posible usar métodos más elaborados de cuantización (usar un mayor número de niveles de cuantización cerca del cero y pocos para las amplitudes altas), pero se verán en cursos posteriores.

Ejercicio 5

Un cuantizador usa 256 niveles. Calcule la razón señal a ruido en [dB] entre el ruido de cuantización y la señal de salida. Si la entrada es una sinusoide de potencia 10 [W], indique además la potencia del ruido. Suponga uniformidad en la entrada.

Nº de bits: $256 = 2^8$ => 8 bits

=> $\frac{S}{N}[dB] = 6*8[dB] = 48[dB]$ => La señal es 48[dB] más intensa que el ruido.

=> $N = 0.25^8 * S = 0.25^8 * 10[W] = 0.153[mW]$