Problema 2

Calcule la transformada de Fourier de la siguiente función:

$$x(t) = \frac{\sin(t) \cdot \sin\left(t/2\right)}{\pi t^2}$$

La idea de este problema es reconocer la multiplicación de dos Sa(). La función puede ser descrita como:

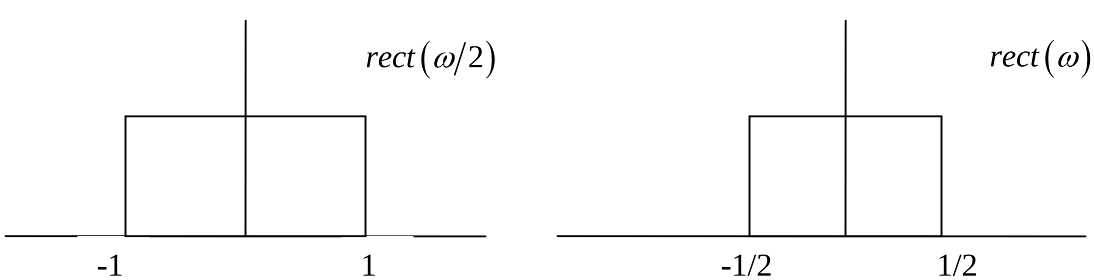
$$x(t) = \pi \frac{\sin(t)}{\pi t} \frac{\sin\left(t/2\right)}{\pi t}$$

Aplicando la propiedad de convolucion se tiene:

$$X\left(\omega\right) = \frac{1}{2\pi} \Im\left(x_1(t)\right) * \Im\left(x_2(t)\right) = \frac{1}{2} \Im\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right) * \Im\left(\frac{\sin\left(t/2\right)}{\pi t}\right)$$

$$\Rightarrow X\left(\omega\right) = \frac{1}{2}\left[rect\left(\omega/2\right) * 2rect\left(\omega\right)\right] = rect\left(\omega/2\right) * rect\left(\omega\right)$$

Gráficamente son dos rectángulos centrados en cero, de anchos 1 y ½ respectivamente:



Aplicando la definición de la convolucion, se tiene que el resultado es:

$$X(\omega)=\begin{cases}\int_{-3/2}^{\omega} d\tau=\omega+3/2 & -\frac{3}{2}\leq\omega\leq-\frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\leq\omega\leq\frac{1}{2}\\ \int_{\omega}^{3/2} d\tau=3/2-\omega & \frac{1}{2}\leq\omega\leq\frac{3}{2}\end{cases}$$

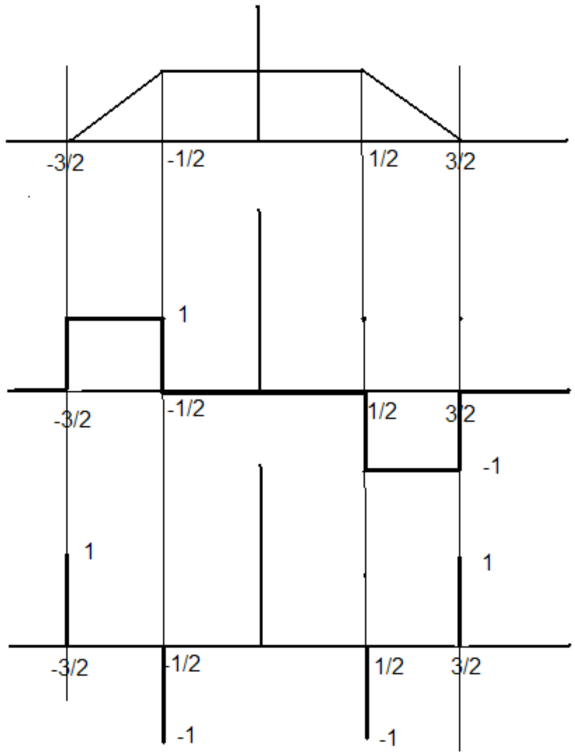
Que pasa si ahora el problema inverso fuera calcular la transformada de Fourier de la siguiente función?

$$x(t)=\begin{cases}t+3/2 & -\frac{3}{2}\leq t\leq-\frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\leq t\leq\frac{1}{2}\\ 3/2-t & \frac{1}{2}\leq t\leq\frac{3}{2}\end{cases}$$

Es decir, el mismo resultado anterior pero en el tiempo. Supongamos que no podemos usar dualidad ya que no sabemos que función en el tiempo da una transformada de Fourier semejante. En este tipo de problemas, donde la función esta formada como por distinto “bloques”, conviene usar la propiedad de la derivada, e decir:

$$\Im\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)=j\omega X(\omega)$$

La idea es derivar la función hasta que aparezca el primer impulso. En este problema:



Resolviendo se tiene:

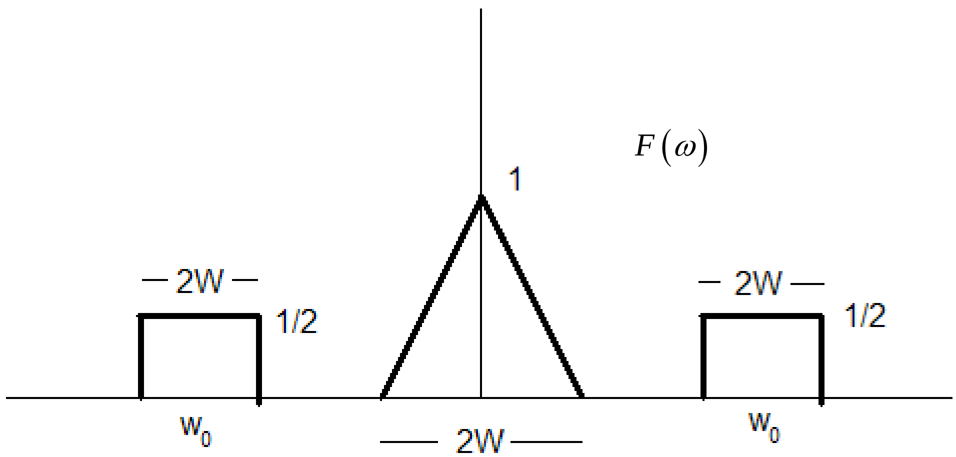
$$(j\omega)^2 X(\omega) = \left[e^{j\omega\frac{3}{2}} - e^{j\omega\frac{1}{2}} - e^{-j\omega\frac{1}{2}} + e^{-j\omega\frac{3}{2}} \right]$$

$$X(\omega) = -\frac{1}{\omega^2} \left[e^{j\omega\frac{3}{2}} - e^{j\omega\frac{1}{2}} - e^{-j\omega\frac{1}{2}} + e^{-j\omega\frac{3}{2}} \right]$$

Como ejercicio vea que se cumple la propiedad de dualidad antes mencionada.

Problema 3

Calcule la transformada de Fourier inversa de la siguiente función en frecuencia:



Siempre que nos aparezca un espectro "duplicado" en la frecuencia, significa que ay una modulación en frecuencia. Utilizando además la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier, se tiene que la función puede ser separada en dos funciones tal que:

$$F(\omega) = \Im\left(x_1(t) + x_2(t)\cos(\omega_0 t)\right) = X_1(\omega) + \pi\left(X_2(\omega - \omega_0) + X_2(\omega + \omega_0)\right)$$

Veamos primero el rectángulo. Es fácil calcular que la transformada de Fourier del rectángulo es:

$$\Im\left(rect\left(t/\tau\right)\right) = \tau Sa\left(\omega\tau/2\right)$$

Entonces, aplicando la propiedad de dualidad, se tiene que:

$$\Im\left(2WSa(tW)\right) = 2\pi rect\left(\omega/_{2W}\right)$$
$$\Rightarrow \Im\left(\frac{W}{2\pi}Sa(tW)\right) = \frac{1}{2}rect\left(\omega/_{2W}\right)$$
$$\Rightarrow x_2(t) = \frac{W}{2\pi^2}Sa(tW)$$

Para el triangulo es más difícil, ya que difícilmente es posible acordarse de alguna antitransformada que este asociada a ella para usar dualidad. En este caso conviene recordar que la convolucion de dos rectángulos es un triangulo, es decir:

$$\frac{1}{W}rect\left(\omega/_W\right) * rect\left(\omega/_W\right) = \Lambda\left(\omega/_W\right)$$

Entonces, aplicando la propiedad de convolucion y utilizando el resultado anterior se tiene que:

$$\frac{1}{W}rect\left(\omega/_W\right) * rect\left(\omega/_W\right) = \Lambda\left(\omega/_W\right)$$
$$\Im\left(\frac{1}{W}\left(\frac{W}{2\pi}Sa\left(Wt/_2\right)\right)^2\right) = \frac{1}{W}rect\left(\omega/_W\right) * rect\left(\omega/_W\right)$$

Entonces, finalmente se tiene que la antitransformada de F(w) es:

$$\Im^{-1}\left(F(\omega)\right) = \frac{W}{4\pi^2}Sa^2\left(Wt/_2\right) + \frac{W}{2\pi^2}Sa(tW)\cos(\omega_0 t) = \frac{W}{2\pi^2}\left[Sa^2\left(Wt/_2\right) + Sa(tW)\cos(\omega_0 t)\right]$$