Análisis de Señales

Capítulo III: Transformada de Fourier discreta

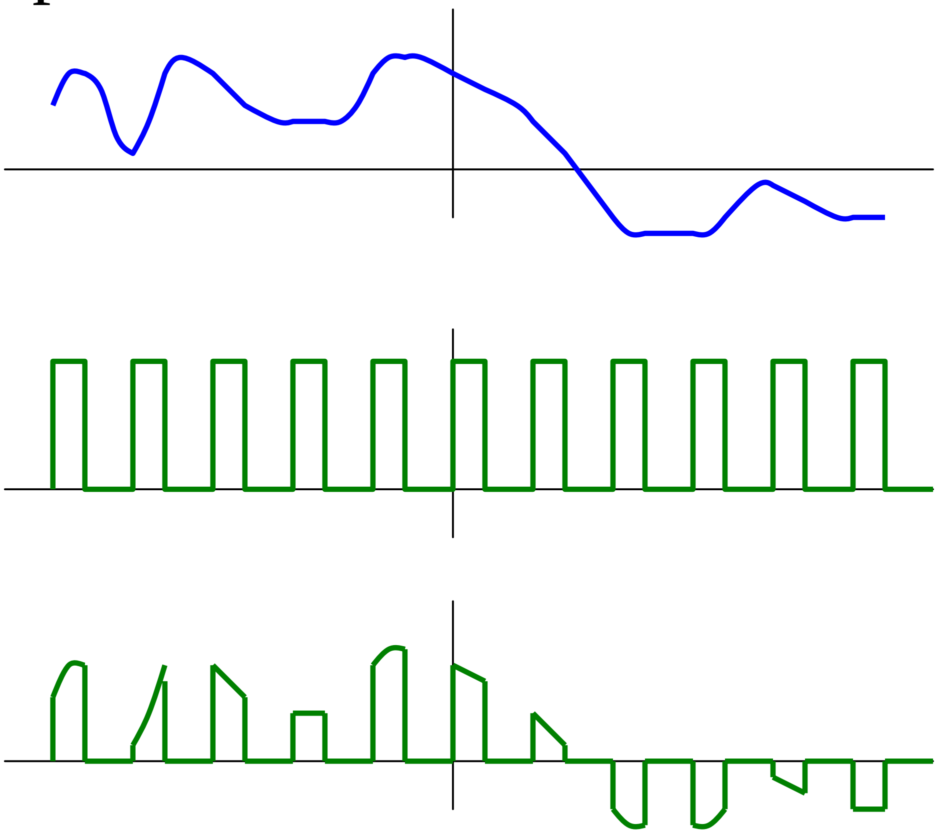
Profesor: Néstor Becerra Yoma

3.1 Teorema del Muestreo

- Gran desarrollo de la computación => digitalización de señales mediante muestreo, posterior reconstrucción de la señal
- Condicion necesaria en el proceso para no perder información: teorema del muestreo:
  - Una señal de ancho de banda B [Hz] puede ser muestreada sin pérdida de información si se toman valores con una separación menor o igual a 1/(2B) segundos.

3.1 Teorema del Muestreo

- Primera aproximación: muestreo usando tren de pulsos



$f(t)$

$P_T(t)$: pulsos, periodo T

$f_S(t) = f(t)P_T(t)$

3.1 Teorema del Muestreo

$$f_S(t) = f(t) P_T(t)$$ $P_T(\cdot)$ es periódica

$$f_S(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t}$$

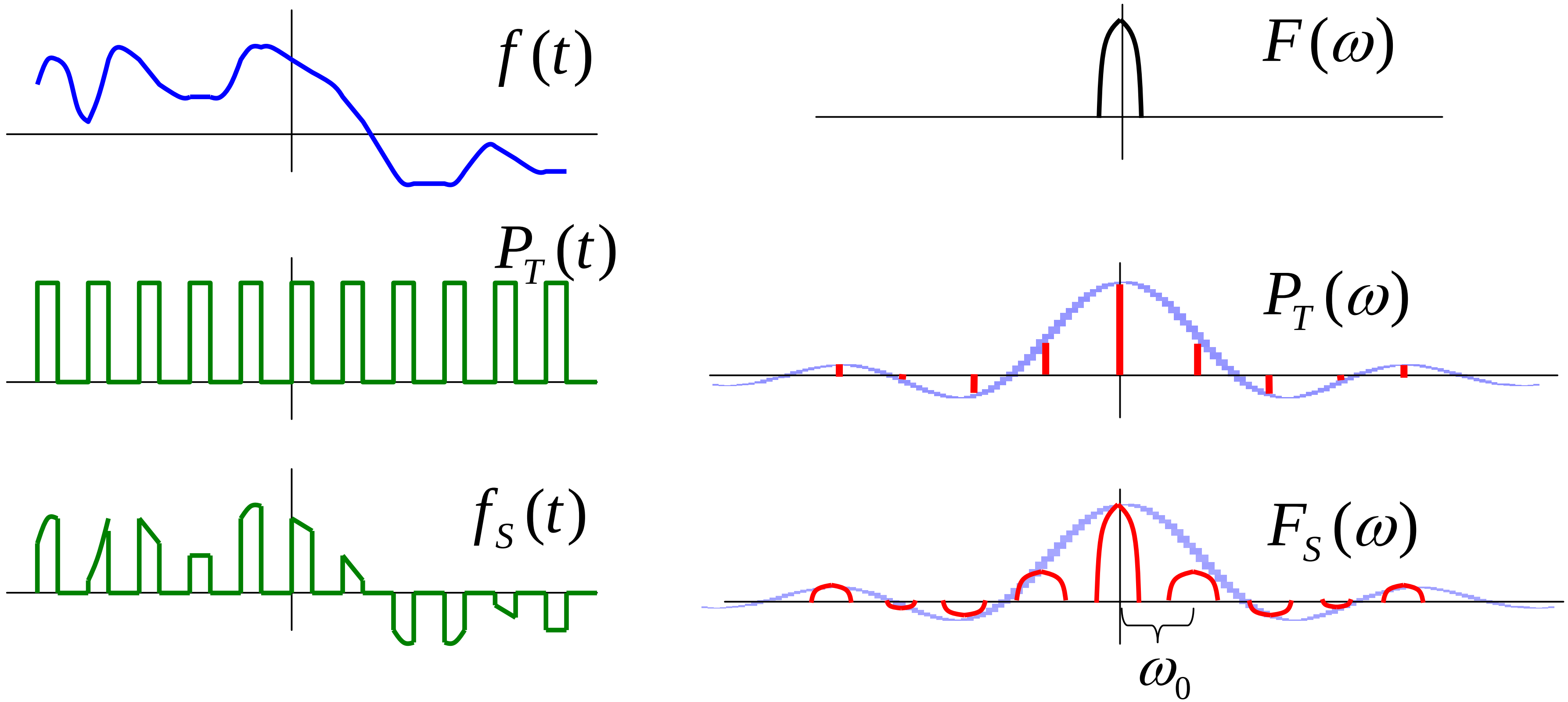
$$\Im\{ f_S(t)\} = \Im\left\{ f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t} \right\}$$

$$\Im\{ f_S(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \Im\left\{ f(t) e^{jn\omega_0 t} \right\}$$

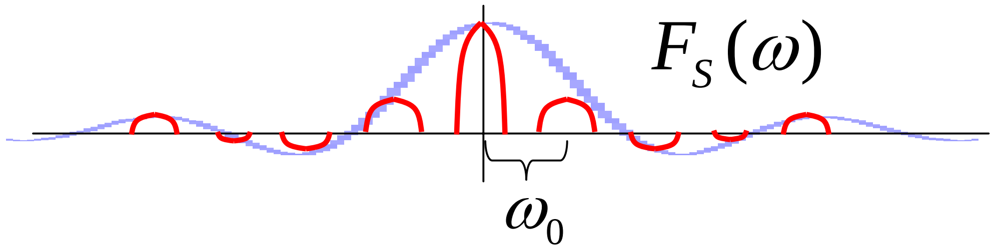
$$\Im\{ f_S(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_0)$$ El espectro F(ω) se repite

3.1 Teorema del Muestreo

$$\Im\{f_S(t)\} = P_0 F(0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



3.1 Teorema del Muestreo



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

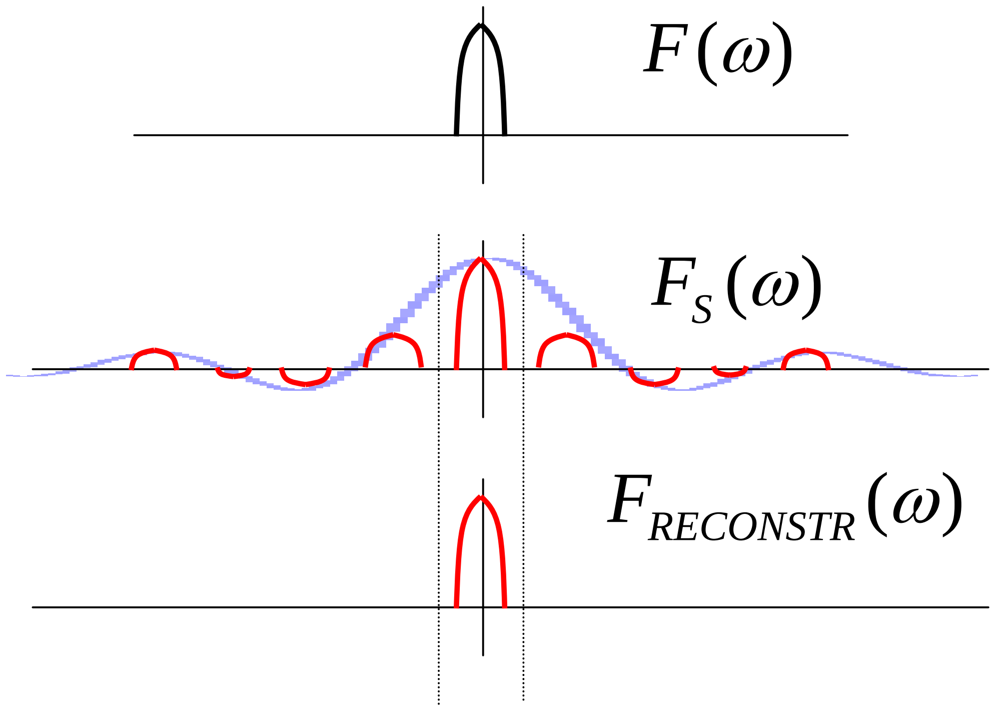
- Si el T de muestreo aumenta => ω_0 disminuye => se puede producir traslape de espectros para T muy grande. El traslape se alcanza cuando:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2W \Rightarrow T = \frac{1}{2B} \quad \text{(frecuencia de Nyquist)}$$

- Para evitar traslape: $T < \dfrac{1}{2B}$

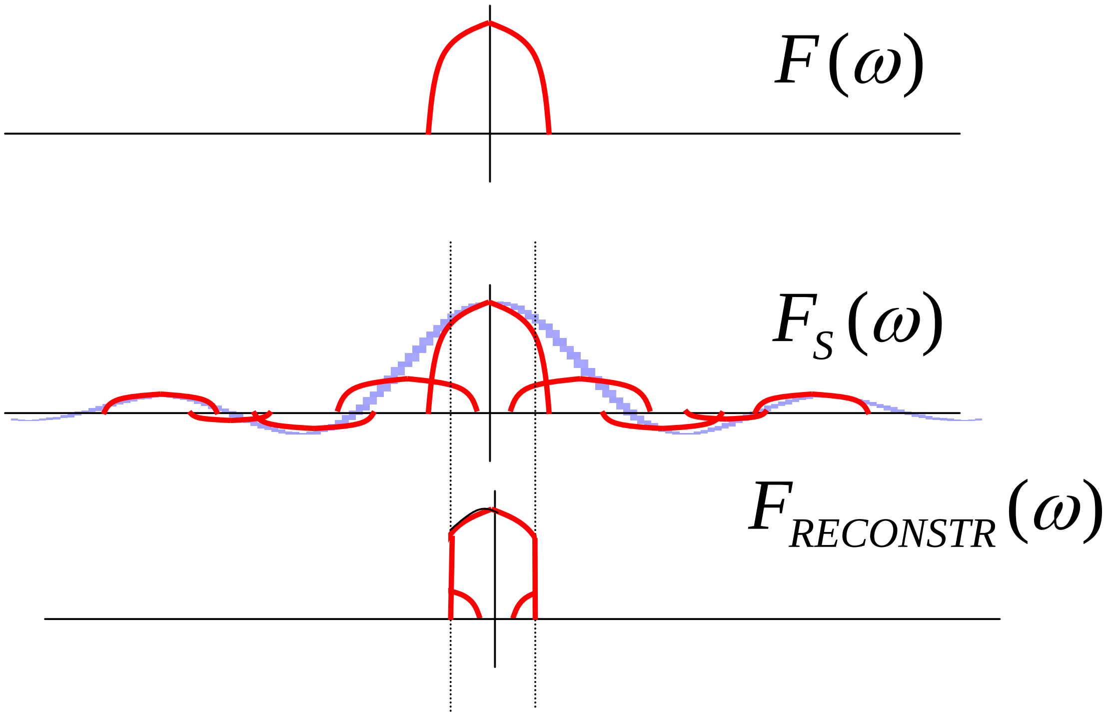
3.1 Teorema del Muestreo

- Reconstrucción de la señal => efecto práctico: pasa la banda entre $-\omega_0/2$ y $\omega_0/2$



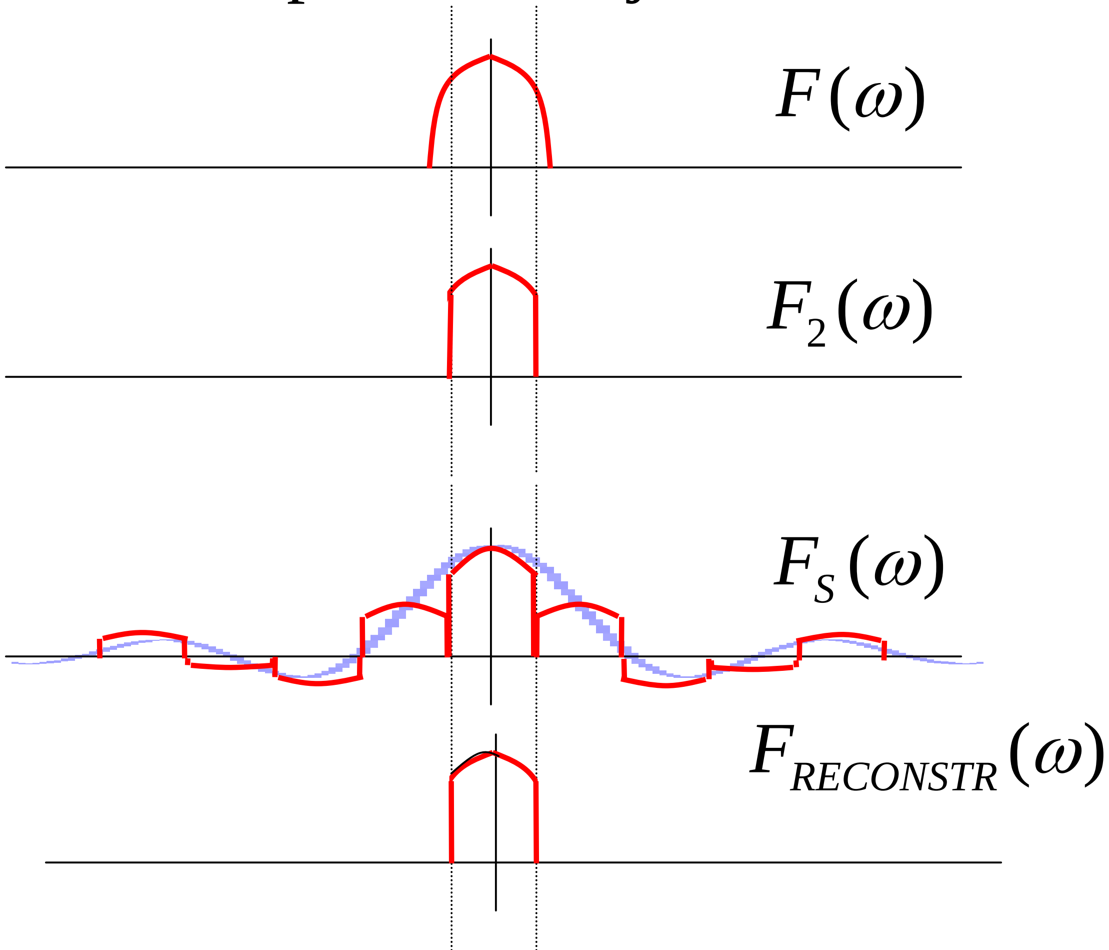
3.2 Efecto alias

- Traslape espectral: efecto alias, T muy grande
- Resultado: distorsión de la señal al reconstruirla.



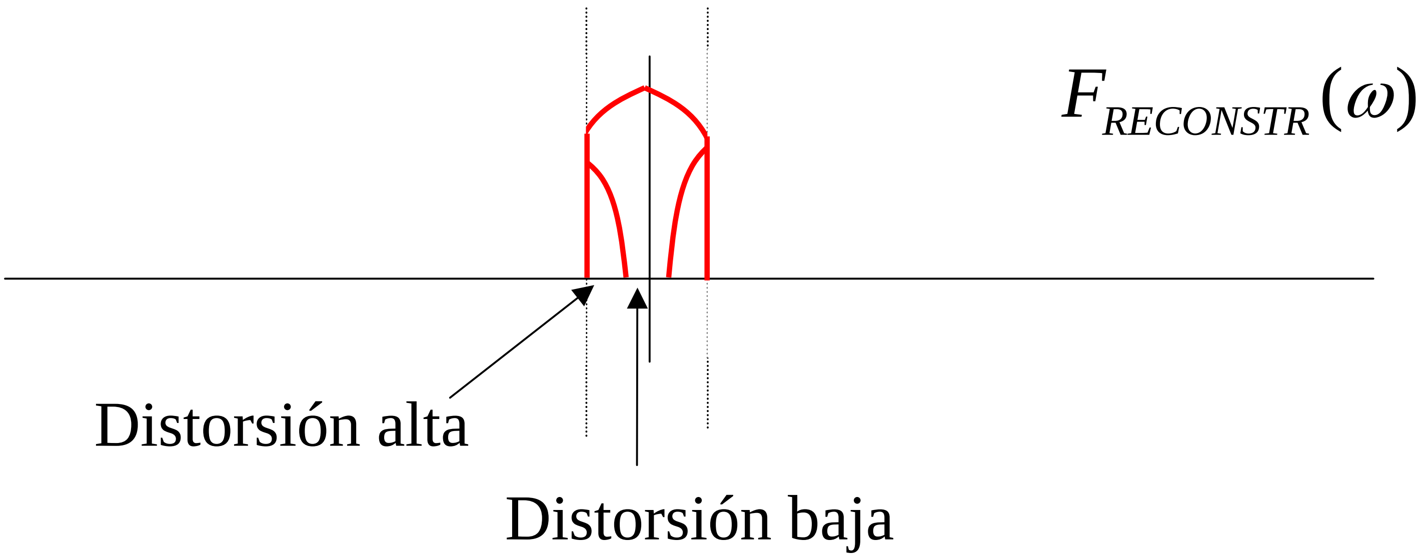
3.2 Efecto alias

- Solución: filtro prealias: baja la distorsión



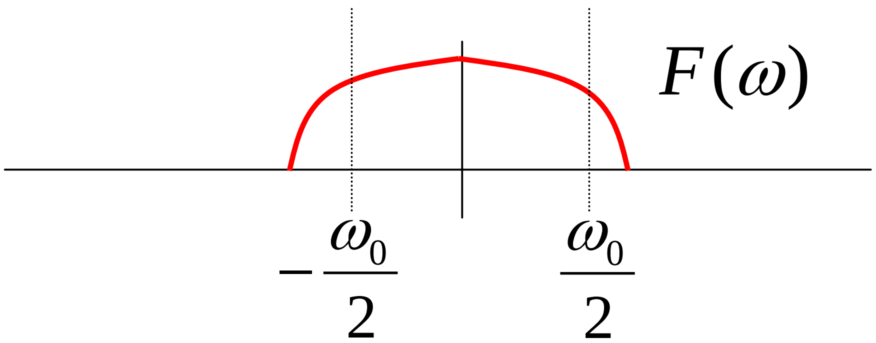
3.2 Efecto alias

- En general, el espectro de una señal se hace menor a medida que aumenta la frecuencia
- La principal distorsión se produce cerca de $\omega_0/2$



3.2 Efecto alias

- Estimación de la cantidad de efecto alias (comparativo):

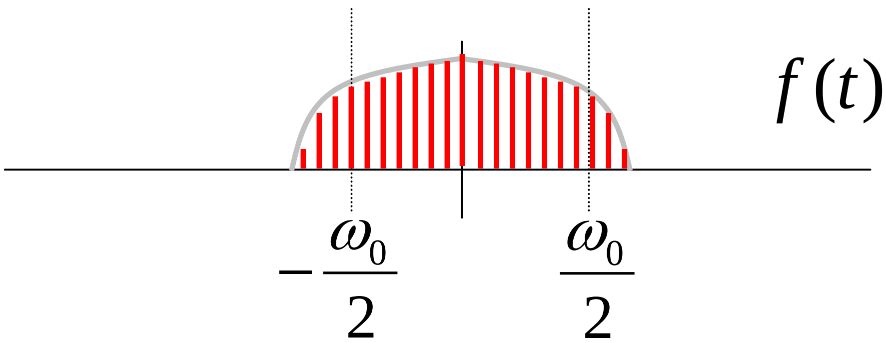


$$\%alias = \frac{\int_{\omega=\omega_0/2}^{\infty} \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \right)^2 \left| F(\omega) \right|^2 d\omega}{\int_{\omega=0}^{\omega_0/2} \left| F(\omega) \right|^2 d\omega}$$

- El término cuadrático penaliza el alias para frecuencias cercanas a $\omega_0/2$

3.2 Efecto alias

- Si f(t) es periódica, de frecuencia $\omega_2 << \omega_0$:



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_2 t}$$

$$\%alias = \frac{\sum_{n=1}^{M/2} (n - M/2)^2 \left|F_{n+M/2}\right|^2}{\sum_{n=1}^{M/2} \left|F_n\right|^2}$$

$$M\omega_2 = \omega_0$$

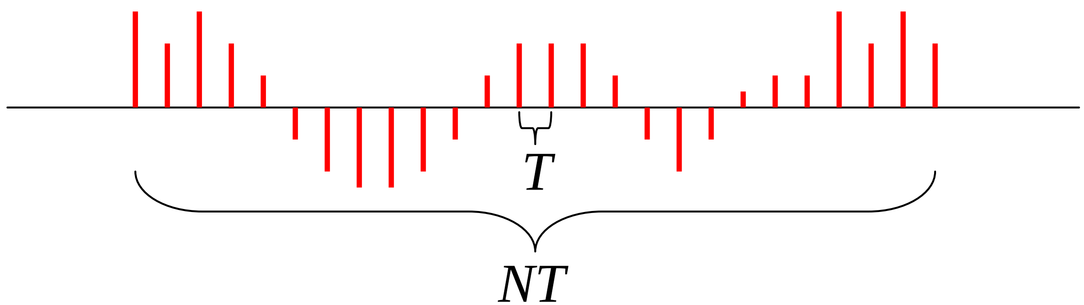
$$\frac{M}{2}\omega_2 = \frac{\omega_0}{2}$$

- La componente de frecuencia M/2 tiene frecuencia $\omega_0/2$

3.3 Transformada de Fourier discreta

- Se tiene N muestras uniformemente distribuidas

$$f(kT) = f(0), f(T), f(2T), \dots, f\big((N-1)T\big)$$



- La transformada de Fourier discreta (DFT) se define como:

$$F_d(n\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-j\, n\Omega\, kT} \qquad \Omega = \frac{2\pi}{NT}$$

3.3 Transformada de Fourier discreta

$$F_d(n\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-j\, n\Omega\, kT} \qquad \Omega = \frac{2\pi}{NT}$$

$$\Rightarrow F_d(n\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-j\, n \frac{2\pi}{N} k}$$

- Ω y T no aparecen de forma explícita en la DFT
- Se puede obtener a partir de la transformada de Fourier, haciendo aproximaciones

3.3 Transformada de Fourier discreta

- Sea: $$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \le t < NT \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

- Su transformada es:

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{t=0}^{NT} f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad /\omega \to n\Omega,\ t \to nT$$

$$\tilde{F}(n\Omega) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jn\Omega kT} T$$

- Luego: $$TF_D(n\Omega) = \tilde{F}(\omega)\,|_{\omega = n\Omega}$$

3.3 Transformada de Fourier discreta

- El espectro obtenido es periódico, de periodo NΩ:

$$F_D(n\Omega + N\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-j(n\Omega + N\Omega)kT}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-jn\Omega kT}e^{-jN\Omega kT} \qquad / \, \Omega = \frac{2\pi}{NT}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-jn\Omega kT}e^{-j2\pi k} = F_D(n\Omega)$$

3.3 Transformada de Fourier discreta

- La exactitud en el cálculo de la transformada también es afectada por el efecto alias.
- La transformada es periódica => la frecuencia más alta que se puede determinar corresponde a $n=N/2$, es decir, $(N/2)\Omega=1/(2T)$ => de acuerdo al teorema del muestreo

3.3 Transformada de Fourier discreta

- También hay una transformada inversa de Fourier discreta:

$$f(kT) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_D(n\Omega)e^{jn\Omega k\mathrm{T}}$$

- La transformada inversa es exacta respecto a la transformada directa, a menos que se produzca efecto alias.
- La transformada inversa es periódica, periodo NT
- Propiedades semejantes a la transformada de Fourier continua.

3.3 Transformada de Fourier discreta

- Ejemplo. Calcular la transformada de f(t) usando 4 muestras sobre el intervalo (0,1):

$$f(t) = u(t) - u(t-1) \Rightarrow \text{la secuencia es } [1,1,1,1]$$

$$F_d(n\Omega) = \sum_{k=0}^{3} f(kT) e^{-j\,n\,k\frac{2\pi}{4}} = \begin{cases} 4 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}, \; T = \frac{1}{4}, \; \Omega = 2\pi$$

- Multiplicando por T, se obtiene:

$$F(\omega)\big|_{n\Omega} = \frac{1}{4} F_d(n\Omega) = \begin{cases} 1 & n\Omega = 0 \\ 0 & n\Omega \neq 0 \end{cases}$$

3.3 Transformada de Fourier discreta

- Se tiene: $$F(\omega)|_{n\Omega} = \frac{1}{4}F_d(n\Omega) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$
- Pero se sabe que:

$$F(\omega) = e^{-j\omega/2}Sa(\omega/2)$$

- No se ven muy parecidos. Si se toma ω=nΩ:

$$F(\omega)|_{n\Omega} = F(2\pi n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad \text{con } n \in \{0,1,2,3\}$$

- Es decir, se llega a lo mismo.

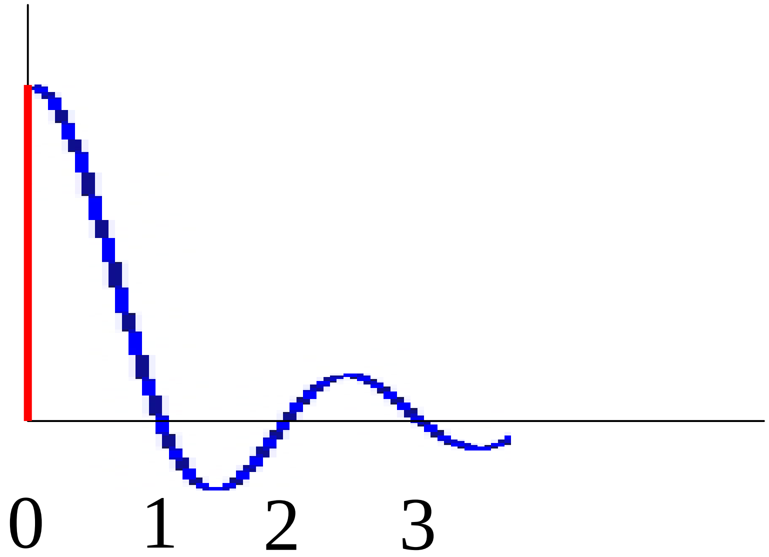
3.3 Transformada de Fourier discreta

- Se obtuvo la transformada discreta:

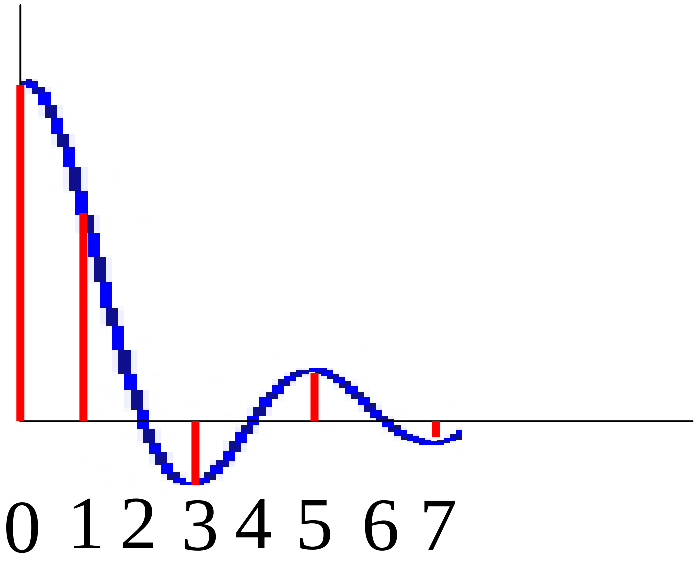
$$F_d(n\Omega) = \sum_{k=0}^{3} f(kT) e^{-j\,n\,k\frac{2\pi}{4}} = \begin{cases} 4 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}, \; T = \frac{1}{4}, \; \Omega = 2\pi$$

- La secuencia [1,1,1,1] no representa realmente un pulso, sino una señal continua, ya que la transformada inversa es periódica.
- Se puede solucionar agregando ceros. Por ejemplo: [1,1,1,1,0,0,0,0]

3.3 Transformada de Fourier discreta



Espectro para [1,1,1,1]



Espectro para [1,1,1,1,0,0,0,0]

Los números indican la ubicación de las líneas espectrales

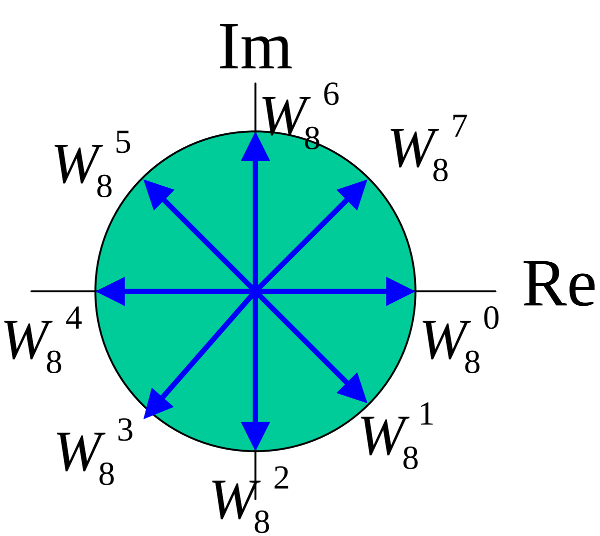
3.4 Transformada de Fourier rápida

- El cálculo de la DFT requiere N^2 multiplicaciones.
- Tiempo de cálculo excesivo para N grande.
- Algoritmo FFT (fast Fourier transform): permite calcular la DFT de forma rápida: $N\log_2 N$ multiplicaciones.
- Dos formas de visualizarla: a partir de sumas por bits o a partir de paridad/imparidad.

3.4 Transformada de Fourier rápida

- La notación W_N para la exponencial de la DFT:
  - Dado N, se define W_N como el círculo unitario dividido en N partes, con ángulos negativos

$$W_N = e^{-j\,n\Omega\,kT} = e^{\frac{2\pi}{NT}} \quad \Rightarrow \quad W_N = 1\angle\frac{-360^{\circ}}{N}$$



$$W_N^{\,N\,x} = e^{-j2\pi\frac{N}{N}x} = 1$$

$$W_N^{\,2} = e^{-j2\pi\frac{2}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$$

$$W_N^{\,x}* = W_N^{\,-x} = W_N^{\,(N-x)}$$

3.4 Transformada de Fourier rápida

- Forma 1 (ejemplo para 4 puntos):

$$F_d(n\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-j\,n\Omega\,kT}$$

$$F_d(n\Omega) = \sum_{k=0}^{3} f(kT) W_4^{\;nk}, \quad \boxed{W_N = e^{-j\,n\Omega\,kT} = e^{\frac{2\pi}{NT}}}$$

- Se pueden escribir k y n como números binarios:

$$k = (k_1, k_0) = \{00, 01, 10, 11\}, \;\; k = 2k_1 + k_0$$

$$n = (n_1, n_0) = \{00, 01, 10, 11\}, \;\; n = 2n_1 + n_0$$

3.4 Transformada de Fourier rápida

- Luego:

$$F_D(n_1,n_0)=\sum_{k_0=0}^{1}\sum_{k_1=0}^{1} f(k_1,k_0)W_4^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)}$$

$$W_4^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)}=W_4^{(2n_1+n_0)}W^{(2n_1+n_0)k_0} \quad /W_4^{4n_1k_1}=1$$

$$=W_4^{2n_0k_1}W_4^{(2n_1+n_0)k_0}$$

$$F_D(n_1,n_0)=\underbrace{\sum_{k_0=0}^{1}\Bigg(\underbrace{\sum_{k_1=0}^{1} f(k_1,k_0)W_4^{2n_0k_1}}_{f_1(n_0,k_0)}\Bigg)W_4^{(2n_1+n_0)k_0}}_{f_2(n_0,n_1)}$$

3.4 Transformada de Fourier rápida

$$f_1(n_0,k_0)=\sum_{k_1=0}^{1} f(k_1,k_0)W_4^{2n_0k_1}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\left.f_1(n_0,k_0)=\sum_{k_1=0}^{1} f(k_1,k_0)W_2^{n_0k_1}\right\}\ \text{Una para pares, otra para impares}\\[2ex]
\left.f_2(n_0,n_1)=\sum_{k_0=0}^{1} f_1(n_0,k_0)W_4^{(2n_1+n_0)k_0}\right\}\ \text{Suma ponderada de las anteriores}\\[2ex]
F_D(n_1,n_0)=f_2(n_0,n_1)
\end{array}\right.$$

3.4 Transformada de Fourier rápida

- Forma 2:

$$F_d(n\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-j\,n\Omega\,kT} = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)W_N{}^{nk}$$

$$F_d(n\Omega) = \sum_{\substack{k=0\\ pares}}^{N-1} f(kT)W_N{}^{nk} + \sum_{\substack{k=0\\ impares}}^{N-1} f(kT)W_N{}^{nk}$$

$$F_d(n\Omega) = \sum_{k'=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k'T)W_N{}^{n2k'} + \sum_{k'=0}^{\frac{N}{2}-1} f\big((2k'+1)T\big)W_N{}^{n(2k'+1)}$$

$$F_d(n\Omega) = \sum_{k'=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k'T)W_N{}^{n2k'} + W_N\sum_{k'=0}^{\frac{N}{2}-1} f\big((2k'+1)T\big)W_N{}^{n2k'} \quad / W_N{}^2 = W_{N/2}$$

3.4 Transformada de Fourier rápida

$$F_d(n\Omega) = \sum_{k'=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2k'T) W_{N/2}{}^{nk'} + W_N \sum_{k'=0}^{\frac{N}{2}-1} f((2k'+1)T) W_{N/2}{}^{nk'}$$

$$\boxed{FFT_{conjunto\ de\ N} = FFT_{pares} + W_N\ FFT_{impares}} \Rightarrow recursivo$$

$$\text{Ejemplo}:$$

$$FFT_{\{x0,x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7\}} =$$

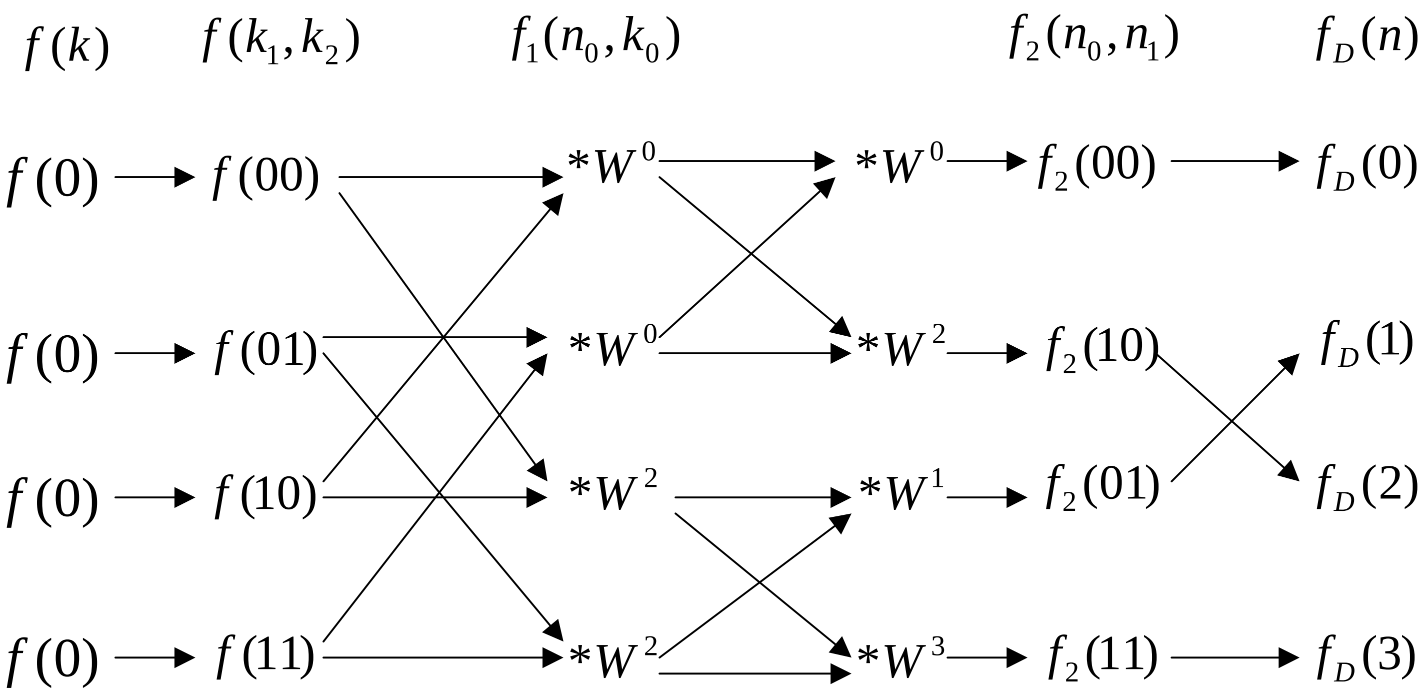
$$= FFT_{\{x0,x2,x4,x6\}} + W_8 FFT_{\{x1,x3,x5,x7\}}$$

$$= FFT_{\{x0,x4\}} + W_4 FFT_{\{x2,x6\}} + W_8\left(FFT_{\{x1,x5\}} + W_4 FFT_{\{x3,x7\}}\right)$$

$$= x_0 + W_2 x_4 + W_4\left(x_2 + W_2 x_6\right) + W_8\left(x_1 + W_2 x_5 + W_4\left(x_3 + W_2 x_7\right)\right)$$

3.4 Transformada de Fourier rápida

- Ejemplo: “mariposa” para 4 puntos:



3.4 Transformada de Fourier rápida

- DFT: lento (N^2), requiere poca memoria
- FFT: rápido ($N \log_2 N$), requiere bastante memoria (recursivo), requiere que el número de puntos sea potencia de 2.

N	N^2	$N \log_2 N$
2	4	2
32	1024	160
256	2048	65536
1024	1048576	10240

3.4 Transformada de Fourier rápida

- Resumen FFT:
  - 1. Se elige el nº de muestras tal que $N=2^r$ con r entero. Si es necesario, se pueden incluir ceros aumentados.
  - 2. Para N muestras en el tiempo existen N frecuencias distintas.
  - 3. Como resultado de la extensión periódica, os puntos de muestra 0 y N son iguales, tanto en el tiempo como en la frecuencia ($f_0=f_N$; $F_{D0}=F_{DN}$)
  - 4. Las componentes de frecuencia positiva están en (0,N/2), las componentes de frecuencia negativa están en (N/2,N). Ocurre lo mismo en el tiempo (tiempos positivos y negativos)

3.4 Transformada de Fourier rápida

– 5. Para funciones de valor real, las componentes de frecuencia positiva son complejas conjugadas de las componentes de frecuencia negativa. Los puntos n=0 y n=N/2 son comunes a ambos, por lo que tienen valor real.

– 6. La componente de frecuencia más alta (es decir, n=N/2) corresponde a 1/(2T) [Hz]. La frecuencia máxima visible se puede aumentar disminuyendo el espaciamiento entre frecuencias en el tiempo

3.4 Transformada de Fourier rápida

– 7. El espaciamiento entre componentes de frecuencia es 1/(NT) [Hz], se puede disminuir agregando ceros aumentados a la secuencia de muestras

– 8. La relación exacta de los valores de la FFT depende de las constantes de multiplicación particulares asignadas en el algoritmo; un procedimiento común es dividir entre N de tal forma que los valores calculados sean 1/N veces los de la DFT

3.4 Transformada de Fourier rápida