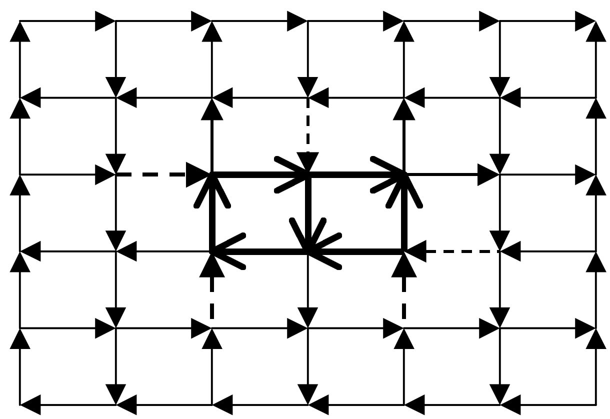
CI43A Análisis de Sistemas de Transporte
Semestre Primavera 2004

Control 3

Pregunta 1

a) (3 ptos.) Suponga la existencia de una red reticular como la descrita en la figura, en que se ha observado alta congestión en los arcos centrales (los que están en negrita). Dado esto, se ha contemplado tarificar el acceso a la zona congestionada, por la vía de asignar una tarifa a todos los arcos que aparecen con línea segmentada. Plantee un problema de optimización que permita encontrar el valor de la tarifa a cobrar, de forma tal que las decisiones que libremente tomen los usuarios sean las más convenientes que sea posible desde el punto de vista del consumo total de recursos en el sistema. Considere que los puntos generadores y atractores de demanda están distribuidos uniformemente en toda la red. Utilice una notación genérica (No es necesario que identifique las rutas para esta red).



El problema se plantea como: $\underset{f_a\, T_a}{Min}\; CT = \sum_a c_a(f_a) f_a$

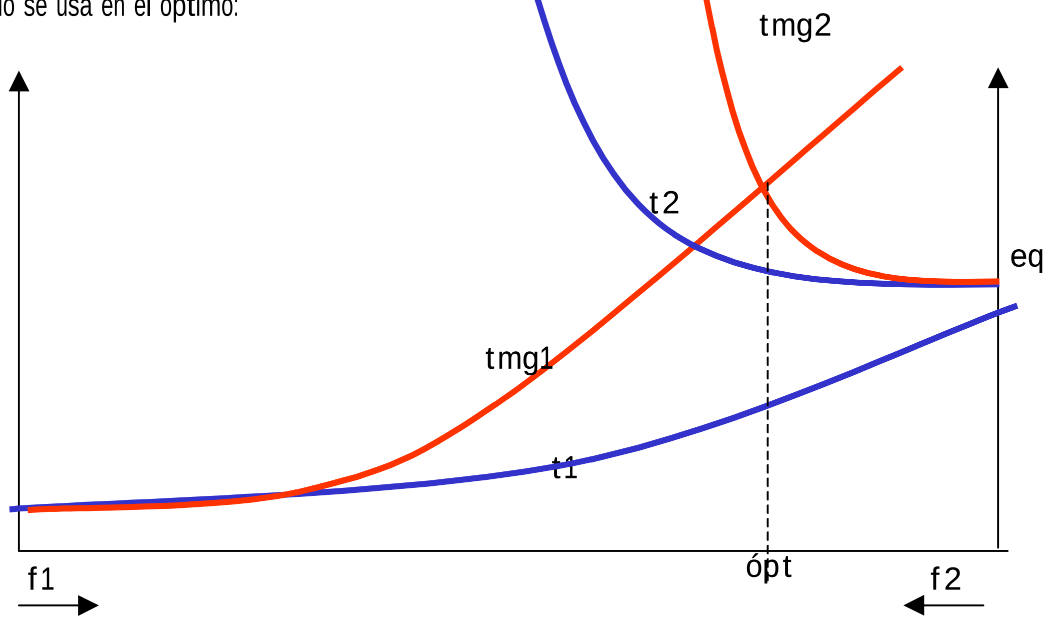
Restricciones:

- Asignación de demanda: $\sum_{p \in P^{ij}} h_p = T^{ij} \quad \forall\, par\ i, j$
- Relación flujo en arco con flujo en rutas $f_a = \sum_p h_p d_a^p \quad \forall a \in A$
- No negatividad de los flujo $h_p \geq 0$
- Condición de equilibrio de Wardrop $h_p(c_p - c_{ij}^*) = 0$

Las tarifas se cobran sólo a los arcos de interés en la figura. Estas tarifas aparecen en la función objetivo al modificar las funciones de costos sólo de los arcos que se van a tarificar, por esta razón es que se optimiza sobre ambas variables.

b) (1pto.) Comente la veracidad de la siguiente afirmación:
Si en cierto par O/D, en el equilibrio todas las rutas están usadas, en el óptimo del sistema también lo estarán, y si en el equilibrio hay una ruta no utilizada, en el óptimo del sistema tampoco lo estará.

No necesariamente se cumple la primera parte de la afirmación, como contraejemplo está la red propuesta por Braess, en que en el equilibrio se usa el nuevo arco (o arco invertido) y en el óptimo no. Tampoco se cumple necesariamente la segunda parte. En la figura se muestra un caso en que una ruta no utilizada en el equilibrio se usa en el óptimo:



c) (1 pto.) En una ciudad con grandes problemas de congestión vehicular, se ha rechazado la idea de implementar tarificación por congestión, ya que los usuarios consideran que no es justo pagar por usar las vías que han sido construidas con fondos estatales. Al alcalde de esa ciudad se le ocurre entonces subsidiar el uso de ciertos arcos de la red. ¿Cree usted que es posible minimizar el tiempo total consumido en la red con una política de subsidios?
Sí es posible, pues las tarifas para que el óptimo del sistema sea una situación de equilibrio se pueden aplicar de diversas maneras (ejem tarifas de mínima recaudación) y una de ellas es a los arcos con tarifas menores restarles las tarifas de arcos de otras rutas que sean mayores (arco por arco). Así, el arco que tenía tarifa mayor queda sin tarifa y el de tarifa menor queda con tarifa negativa, o sea, subsidio.

d) (1 pto.) Un antiguo estudiante de CI43A señala que la paradoja de Braess no es cierta, pues si bien es posible que al proveer más infraestructura a una red aumenten los costos de los usuarios, éstos, al darse cuenta, simplemente van a dejar de usarla, volviendo a la situación inicial. Comente esta aseveración.
A pesar de que en la nueva situación los costos aumentan, ningún usuario puede mejorar su tiempo unilateralmente pues se ha alcanzado el equilibrio, es decir, un usuario que utiliza el nuevo arco no tiene incentivos para dejar de utilizarlo pues si se cambia de ruta su costo privado aumenta. Por esto la nueva infraestructura es utilizada de todas maneras

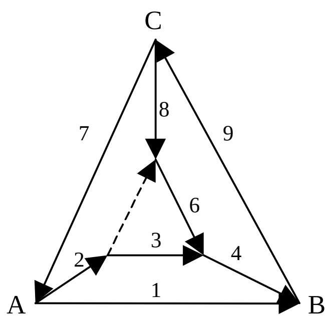
Pregunta 2
Para la red de la figura, encuentre la curva de oferta para el par origen-destino AC. Considere constante la demanda en los otros pares Origen-Destino.

Demanda:

	A	B	C
A	---	400	Variable
B	200	---	---
C	400	300	---

Funciones tiempo [min] – flujo[veh ¯ır]:
$t=10+0{,}1\cdot f$

Hint: Recuerde que, en el caso de funciones de costo crecientes con el flujo, el problema de equilibrio tiene solución única en términos de flujos en arcos y no necesariamente en términos de flujos en rutas.



Primero que nada, debemos encontrar todas las rutas para cada par Origen-Destino

Rutas:	A-C:	a: 1-9	A-B	a: 1	B-A	a: 9-7	C-B	a: 7-1
		b: 2-3-4-9		b: 2-3-4				b: 7-2-3-4
		c: 2-5-6-4-9		c: 2-5-6-4	C-A	a: 7		c: 7-2-5-6-4
								d: 8-6-4

Inicialmente debemos encontrar el equilibrio para T=0. Supondr4emos que sólo se usan las rutas (a) para los pares AC y AB (menor costo) y que en el par CB sólo se usa la ruta (d). Con estos supuestos, debemos plantear las ecuaciones de continuidad de flujo y verificar que se cumpla la condición de equilibrio.

➔ $h_a^{AC}=T$ $h_a^{AB}=400$ $h_a^{BA}=200$ $h_a^{CA}=400$ $h_d^{CB}=300$

Relación entre flujos en arcos y flujos en rutas➔

f1=T+400 f2=0=f3=f5 f7=200+400 f8=300=f4=f6 f9=T+200

T=0 ➔ f1=700, f9=200 ➔ Tiempo en las distintas rutas:

Rutas:	A-C: a_{1-9} **80**	A-B: a_1 **50**	B-A a_{9-7} **100**	C-B a_{7-1} 120
	$b_{2-3-4-9}$ 90	b_{2-3-4} 60		$b_{7-2-3-4}$ 130
	$c_{2-5-6-4-9}$ 130	$c_{2-5-6-4}$ 100	C-A a_7 **70**	$c_{7-2-5-6-4}$ 170
				d_{8-6-4} **120**

Se verifica que es una situación de equilibrio, los costos de todas las rutas utilizadas son iguales y mínimos.

El primer tramo de la curva de oferta es: t=t1+t9=20+0,1*(f1+f9)=20+0,1*(T+400+T+200)=80+0,2T

Esta curva es válida hasta que el tiempo de la ruta (a) se iguala con el tiempo de la ruta (b) para los pares AC y AB. Buscamos ese punto imponiendo equilibrio entre las rutas (a) y (b), pero h_b=0. Las ecuaciones de continuidad siguen siendo las mismas.

Equilibrio: ta = tb(h_b=0) ➔ t1=t2+t3+t4 → 10+0,1(400+T)=30+0,1*300 → T=100

Curva de oferta en el segundo tramo.
f1+f2= 400+T f8=300=f6 f4=300+f2 f3=f2 f9=200+T f7=600

Equilibrio t1=t2+t3+t4

resolviendo encontramos que:

$f_1 = \frac{3T+1700}{4}$ y el tiempo para la ruta a es: $t_a = 20 + 0{,}1\left(f_1 + f_9\right) = 82{,}5 + \frac{7}{40}T$

la ruta c se comienza a utilizar cuando t_a = t_b = t_c(h_c=0). Resolvemos el nuevo problema:

f1+f2= f7+400+T-600
f8=300
f9=200+T
f7+f8=f9+700-T
f9=f4+f1+200-700
f2=f3
f6=f8

Equilibrio t_a = t_b = t_c(h_c=0). ➔ t3=t5+t6   t1=t2+t3+t4   resolviendo encontramos que T=1700.
Curva de oferta cuando la ruta c se utiliza:
f1+f2= f7+400+T-600
f8=300
f9=200+T
f7+f8=f9+700-T
f9=f4+f1+200-700
f2=f3+f5
f6=f8 , f4=f6+f3

Equilibrio t1=t2+t3+t4
t3=t5+t6
resolviendo encontramos que:

$f_1 = \frac{8T+5600}{11}$ y el tiempo para la ruta a es: $t_a = 20 + 0{,}1\left(f_1 + f_9\right) = 90{,}9 + \frac{19}{110}T$

Asignación de puntajes:
1,5 Encontrar rutas para todos los pares O/D
1,5 Plantear ecuaciones de continuidad
1,5 Plantear ecuaciones de equilibrio
1,5 Resolver y encontrar la curva de oferta o resolver y llegar a situaciones que no son de equilibrio y re-plantear las ecuaciones.