

## TEMA 2.8 MODELOS DE CALIDAD DEL AGUA

### CI41B Ingeniería Ambiental

Profesores D. Rodríguez, R. Muñoz, J. Cornejo y C. Espinoza  
Semestre Otoño 2004

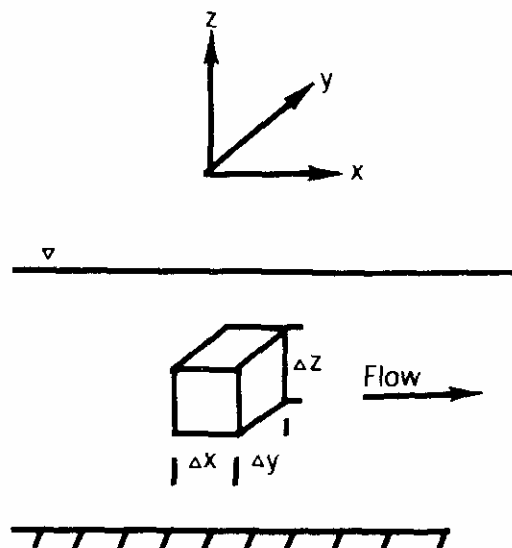
#### 1. INTRODUCCION

Un importante número de problemas relacionados con el control de la contaminación de agua superficial involucra la descarga de residuos líquidos que para todos los efectos prácticos no decaen en el tiempo o no desaparecen del curso de agua por sedimentación., adsorción u otro proceso. Tales residuos se conocen como *conservativos*. Ejemplos de compuestos conservativos son los sólidos disueltos y los cloruros. Algunos contaminantes como pesticidas y herbicidas, los cuales decaen muy lentamente en el tiempo, también se consideran compuestos conservativos.

Otros problemas de control de contaminación se refieren a aquellas sustancias que decaen con el tiempo, entre lo que se puede mencionar a la demanda bioquímica de oxígeno y las bacterias coliformes. Estos compuestos contaminantes se conocen como *no conservativos*.

Para formular una relación determinística entre los residuos descargados al ambiente y la calidad del agua resultante, ambas en términos de un mismo compuesto, podemos considerar un pequeño volumen de río donde la coordenada  $x$  se alinea con la longitud del río, la coordenada  $y$  con su ancho, y la coordenada  $z$  con la profundidad del río, tal como se muestra en la Figura 1.

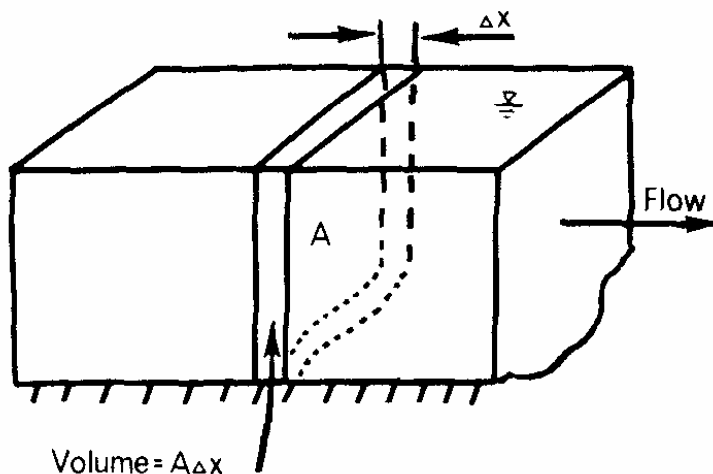
**Figura 1**  
**Volumen Infinitesimal en un Río**



En muchos ríos y esteros, es posible considerar al cuerpo de agua como homogéneo con respecto a las variables de calidad del agua en las direcciones transversal y vertical. El

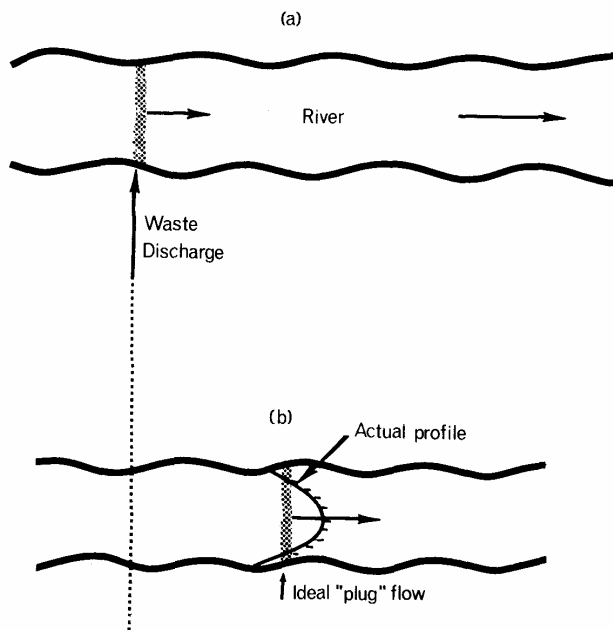
compuesto contaminante varía o "tiene un gradiente" sólo en la dirección del río. Este tipo de sistema se conoce como unidimensional, en contraste con cuerpos de agua con variaciones importantes en las tres direcciones o sistemas tridimensionales. La Figura 2 muestra un sistema unidimensional en el cual el área de escurrimiento es  $A$  y el espesor del elemento de control es  $\Delta x$ .

**Figura 2**  
**Elemento Infinitesimal en un Sistema Unidimensional**



Para muchas situaciones relacionadas con la calidad del agua en ríos y esteros es posible asumir que el medio es no dispersivo, es decir, cada elemento del material contaminante fluye en la dirección de la corriente (agua abajo). No existe mezcla debido a difusión o dispersión. Esto se conoce como *flujo pistón* y se ilustra en la Figura 3.

**Figura 3**  
**Ilustración de Flujo Pistón en un Río**



## 2. MODELOS DE CALIDAD DE AGUAS - COMPUESTOS INDIVIDUALES

### 2.1 Balance de Masas

La masa total del compuesto  $C$  [ $M/L^3$ ] que entra a través de la sección de control en la Figura 2, en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  es:

$$Q \cdot C \cdot \Delta t \quad (1)$$

donde  $Q$  es el caudal en el río. De manera similar, la masa de contaminante que sale del volumen de control a través de una cara situada a una distancia  $\Delta x$  de la zona de entrada está dada por:

$$(Q + \Delta Q) \cdot \left( C + \frac{\partial C}{\partial x} \Delta x \right) \cdot \Delta t \quad (2)$$

A partir de las definiciones anteriores, la variación de la masa del compuesto  $C$  dentro del volumen de control debido a la entrada y salida de contaminante, así como también debido a reacciones simples, sobre el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es:

$$V \cdot \Delta C = Q \cdot C \cdot \Delta t - (Q + \Delta Q) \cdot \left( C + \frac{\partial C}{\partial x} \Delta x \right) \cdot \Delta t \pm K \cdot V \cdot C \cdot \Delta t \quad (3)$$

donde  $K$  [ $1/T$ ] representa el coeficiente de una reacción de primer orden que describe la pérdida o ganancia del compuesto  $C$ .

Al expandir la ecuación (3) y dividir por el intervalo de tiempo,  $\Delta t$ , y el volumen  $V (= A \cdot \Delta x)$ , se tiene:

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = -\frac{Q}{A} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{C}{A} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta x} - \frac{\Delta Q}{A} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \pm K \cdot C \quad (4)$$

Si ahora tomamos el límite cuando el tamaño de la separación,  $\Delta x$ , y el intervalo de tiempo,  $\Delta t$ , se aproximan a cero podemos escribir:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{Q}{A} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{C}{A} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \pm K \cdot C \quad (5a)$$

o escrito en forma más reducida:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial (Q \cdot C)}{\partial x} \pm K \cdot C \quad (5b)$$

Las ecuaciones (5a) y (5b) representan la ecuación diferencial básica para el estudio de un sistema simple y no dispersivo. Como se indicó anteriormente, este modelo asume que no existe mezcla (o dispersión) y se conoce comúnmente como *modelo advectivo* o *modelo de máximo gradiente*.

Si la variable  $C$  representa un compuesto conservativo,  $K=0$ . El flujo, el área perpendicular, así como el coeficiente de decaimiento pueden ser funciones de la distancia y tiempo.

Comúnmente se considera el origen del eje  $x$  en la ubicación de una descarga. De esta manera, una condición de borde característica es:

$$C = C_0(t) \quad \text{en} \quad x = 0 \quad (6)$$

donde  $C_0(t)$  es la concentración del compuesto  $C$  en la localización de la descarga.

## 2.2 Régimen Permanente, Compuesto Conservativo

En esta situación,  $K$  es igual a cero, y los otros dos parámetros de la ecuación (5), así como la concentración de la descarga se suponen constantes. Para efectos de simplificar aún más el análisis supongamos que el resto de los parámetros no varían con el espacio.

De esta manera, el supuesto de régimen permanente permite escribir:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad \text{y} \quad C = C_0 \quad \text{en} \quad x = 0$$

El supuesto de coeficientes constantes en el espacio permite escribir:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad A = A_0$$

De esta manera, la ecuación (5) se puede escribir como:

$$0 = -\frac{Q}{A_0} \cdot \frac{dC}{dx} = -u \cdot \frac{dC}{dx} \quad (7)$$

donde  $u$  es la velocidad de la corriente.

La solución de la ecuación (7) es obviamente una constante, el valor de la cual se puede determinar a partir de la condición de borde en la descarga. La concentración  $C_0$  se puede calcular con un balance de masas en la descarga tal que:

$$C_0 = \frac{Q_R \cdot C_R + Q_D \cdot C_D}{Q_R + Q_D} \quad (8)$$

donde  $Q_R$  y  $C_R$  son el caudal y la concentración en el río antes de la descarga, mientras que  $Q_D$  y  $C_D$  representan el caudal y la concentración de la descarga misma.

La Figura 4 ilustra en forma gráfica la solución anterior. De esta manera, en la Figura 4a se tiene un río en el cual existen dos descargas y un tributario que se ubica aguas abajo de las descargas. La Figura 4b muestra el aumento de flujo debido a las descargas y el tributario, mientras que la Figura 4c muestra la disminución de la concentración en el río, en línea sólida,

por efecto de dilución debido a las descargas y el tributario. Las Figuras 4d y 4e muestran los efectos individuales de las descargas 1 y 2, mientras que la Figura 4f muestra el efecto combinado de las distintas descargas y del tributario sobre la calidad del agua en el río. En línea punteada se observa la variación de la concentración en el caso de un compuesto no conservativo.

### 2.3 Régimen Permanente, Compuesto No Conservativo

En este caso la ecuación (5) se puede escribir como:

$$0 = -\frac{Q}{A} \cdot \frac{dC}{dx} - \frac{C}{A} \cdot \frac{dQ}{dx} - K \cdot C \quad (9)$$

Si nuevamente se supone que el caudal y el área transversal son constantes, y sólo se considera descargas puntuales, la ecuación (9) se puede escribir como:

$$0 = -\frac{Q}{A_0} \cdot \frac{dC}{dx} - K \cdot C = -u \cdot \frac{dC}{dx} - K \cdot C \quad (10)$$

con la condición de borde:

$$C = C_0 \quad \text{en} \quad x = 0$$

La integración de la ecuación (10) permite escribir:

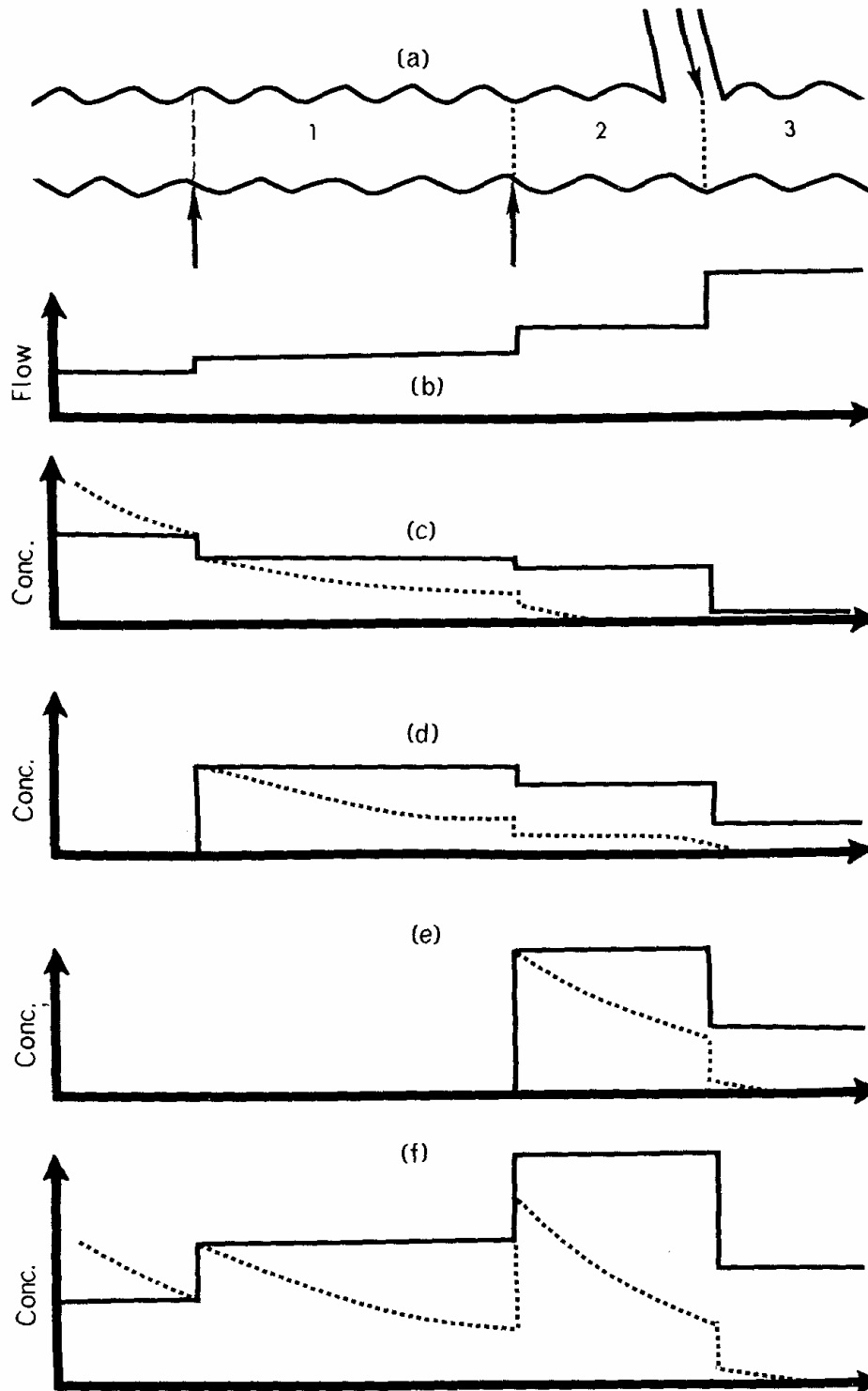
$$C(x) = C_0 \cdot \exp\left[-\frac{K}{u} \cdot x\right] \quad (11)$$

Al sustituir la expresión para la concentración  $C_0$  que se presenta en la ecuación (8) se puede obtener:

$$C(x) = \left( \frac{Q_R \cdot C_R + Q_D \cdot C_D}{Q_R + Q_D} \right) \cdot \exp\left[-\frac{K}{u} \cdot x\right] \quad (12)$$

En contraste con la ecuación (8) se observa que para el caso de un compuesto no conservativo, su concentración decae en forma exponencial con la distancia en el río. La ecuación (12) es válida en todo un tramo de río hasta que una nueva descarga cambia las condiciones de borde. Los esquemas de la Figura 4 muestra, con línea punteada, la variación de la concentración de un compuesto no conservativo.

**Figura 4**  
**Variación de la Calidad del Agua en un Río**



## 2.4 Régimen Impermanente o Transiente

Para analizar la situación de régimen transiente es conveniente volver a la ecuación general obtenida a partir de un balance de masas:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{Q}{A} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{C}{A} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \pm K \cdot C \quad (13)$$

Para efectos de su solución analítica consideremos una situación más simple en la que los parámetros  $Q$ ,  $A$  y  $K$  son constantes en el tiempo, pero pueden variar en el espacio. La descarga de residuos líquidos varía en el tiempo según una relación del tipo  $W(t)$ . De esta manera, la ecuación (13) se puede escribir como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{Q}{A} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} - (K + v) \cdot C \quad (14)$$

donde

$$v(x) = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}$$

y

$$C = C_0(t) \quad \text{en} \quad x = 0$$

y

$$C_0(t) = \frac{W(t)}{Q_R + Q_D} = \frac{W(t)}{Q_M}$$

suponiendo que  $C_R$ , la concentración en el río, es nula.

La solución de la ecuación (17) se puede obtener mediante el método de las características con lo que se tiene:

$$C(x, t) = C_0(t - t^*) \cdot \exp[-\Phi_1(x)] \quad (15a)$$

o

$$C(x, t) = \frac{W(t - t^*)}{Q_M} \cdot \exp[-\Phi_1(x)] \quad (15b)$$

donde

$$\Phi_1(x) = \int_0^x \frac{K + v}{u} d\xi \quad (15c)$$

y

$$t^* = \text{tiempo de viaje a } x = \int_0^x \frac{dx}{u} \quad (15d)$$

### 3. MODELOS DE CALIDAD DE AGUAS - SISTEMAS ACOPLADOS

#### 3.1 Balance de Masas

Sistemas acoplados se refiere a aquellos fenómenos de calidad de aguas en los que un parámetro específico está forzado por el valor de otro compuesto que reacciona simultáneamente. Ejemplos de estos sistemas son la demanda bioquímica de oxígeno (DBO, medida de la materia orgánica en un cuerpo de agua) y el oxígeno disponible para estabilización de la materia orgánica. Asimismo se tiene a interacción entre polifosfatos y ortofosfatos en un río.

El procedimiento seguido para construir un modelo matemático de un sistema acoplado es idéntico a aquel correspondiente a un sistema individual. Se desarrolla un balance de masas sobre un volumen elemental de río para cada uno de los compuestos considerados en este análisis. Asimismo, no existe dilución y las reacciones que existen son de primer orden. Todo lo anterior permite escribir las siguientes ecuaciones, donde  $C_1$  y  $C_2$  son las concentraciones de los dos compuestos estudiados:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = -\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial(Q \cdot C_1)}{\partial x} - K_{11} \cdot C_1 \quad (16a)$$

y

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = -\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial(Q \cdot C_2)}{\partial x} - K_{22} \cdot C_2 + K_{12} \cdot C_1 \quad (16b)$$

con:

$$C_1(0, t) = C_{01}(t) \quad \text{en } x = 0$$

$$C_2(0, t) = C_{02}(t) \quad \text{en } x = 0$$

La solución de la ecuación (16a) aparece como una función forzante para definir el comportamiento de la variable o parámetro  $C_2$ .

#### 3.2 Régimen Permanente

Bajo el supuesto de una situación en régimen permanente, así como parámetros constantes, las ecuaciones (16a) y (16b) se pueden escribir como:

$$-u \cdot \frac{dC_1}{dx} - K_{11} \cdot C_1 = 0 \quad (17a)$$



$$-u \cdot \frac{dC_2}{dx} - K_{22} \cdot C_2 + K_{12} \cdot C_1 = 0 \quad (17b)$$

La solución de la ecuación (17a) con una condición de borde dada por:

$$C_1 = C_{01} \quad \text{en} \quad x = 0$$

nos permite obtener:

$$C_1(x) = C_{01} \cdot \exp\left[-\frac{K_{11}}{u} \cdot x\right] \quad (18)$$

Si las concentraciones aguas arriba de la descarga son despreciables, entonces:

$$C_{01} = \frac{W_1}{Q_M}$$

y,

$$C_1(x) = \frac{W_1}{Q_M} \cdot \exp\left[-\frac{K_{11}}{u} \cdot x\right] \quad (19)$$

La ecuación (19) actúa como una función forzante para la ecuación (17b), lo que permite escribir:

$$u \cdot \frac{dC_2}{dx} + K_{22} \cdot C_2 = K_{12} \cdot \frac{W_1}{Q_M} \cdot \exp\left[-\frac{K_{11}}{u} \cdot x\right] \quad (20)$$

sujeta a la condición de borde:

$$C_2 = C_{02} \quad \text{en} \quad x = 0$$

Esta ecuación puede ser integrada para obtener:

$$C_2(x) = \frac{K_{12}}{K_{22} - K_{11}} \cdot \left\{ \exp\left[-\frac{K_{11}}{u} \cdot x\right] - \exp\left[-\frac{K_{22}}{u} \cdot x\right] \right\} \cdot \frac{W_1}{Q_M} + C_{02} \cdot \exp\left[-\frac{K_{22}}{u} \cdot x\right] \quad (21)$$

Esta última ecuación, cuando se aplica al problema de consumo de oxígeno durante la estabilización de materia orgánica en un río, se denomina Ecuación de Streeter y Phelps.

### 3.3 Régimen Impermanente o Transiente

Al igual que para el caso de un compuesto individual supongamos que  $Q$ ,  $A$ ,  $K_{ij}$  son constantes en el tiempo pero variables en el espacio. Considerando lo anterior podemos escribir:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = -\frac{Q}{A} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial x} - (K_{11} + \nu) \cdot C_1 \quad (22a)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = -\frac{Q}{A} \cdot \frac{\partial C_2}{\partial x} - (K_{22} + \nu) \cdot C_2 + K_{12} \cdot C_1 \quad (22b)$$

y

$$C_1 = C_{01} \quad \text{en} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad t = 0$$

$$C_2 = C_{02} \quad \text{en} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad t = 0$$

La solución para  $C_2$  puede ser obtenida con la aplicación de Transformadas de Laplace y está dada por:

$$C_2(x, t) = C_{01}(t - t^*) \cdot \left( \frac{K_{12}}{K_{22} - K_{11}} \right) \cdot \{ \exp[-\Phi_1(x)] - \exp[-\Phi_2(x)] \} + C_{01}(t - t^*) \cdot \exp[-\Phi_2(x)] \quad (24)$$

donde:

$$C_{01}(t - t^*) = \frac{W_1(t - t^*)}{Q_M} \quad (24)$$

y  $t^*$  es el tiempo de viaje.

## EJEMPLO 1

### Afloramiento Flujo Subterráneo

Supongamos un río en el cual su caudal se incrementa en forma exponencial debido a un flujo subterráneo que aflora a lo largo del río, pero los otros parámetros no cambian substancialmente.

$$Q(x) = Q_0 \cdot \exp(q \cdot x)$$

Determine la variación de la concentración de un compuesto conservativo a lo largo del río.

## EJEMPLO 2

### Descarga hacia un Río

Una planta de tratamiento se encuentra descargando hacia un río un efluente con una elevada concentración de bacterias coliformes. Aguas abajo del punto de descarga se encuentran localizados una devolución de riego, la extracción para un canal de regadío y una zona de recreación. En esta última es necesario cumplir con la normativa ambiental que indica que la concentración de coliformes no debe exceder los 1000 coliformes por 100 ml.

Una vez en el río las bacterias coliformes son eliminadas a una tasa de primer orden (tasa de consumo), mientras que su crecimiento ocurre a una tasa de orden cero:

$$r_c = \left. \frac{dX}{dt} \right|_{\text{CONSUMO}} = -k_1 \cdot X$$

$$r_x = \left. \frac{dX}{dt} \right|_{\text{CRECIMIENTO}} = b$$

donde  $k_1$  y  $b$  son dos constantes.

Si cada tramo de río (ver Figura E2.1) puede ser modelado como un reactor de flujo pistón determine la concentración de coliformes a la salida de un tramo de río en función de variables como la concentración de entrada ( $X_0$ ), el volumen del tramo ( $V$ ), el área de escurrimiento ( $A$ ), el caudal transportado ( $Q$ ), entre otros.

Utilizando los datos entregados en la Tabla E2.1 determine la concentración de coliformes esperada al inicio de la zona de recreación. ¿Es posible autorizar su funcionamiento? En caso que su respuesta sea negativa, ¿Cuál sería el porcentaje de remoción de bacterias (mediante desinfección) que debería utilizarse para lograr la autorización de la zona recreacional?

**Tabla E2.1**  
**Resumen Información Básica**

Parámetro	Unidad	Valor
$Q_{RIO}$	$m^3/s$	10
$X_{RIO}$	Coliformes/100 ml	0
$Q_{PT}$	$m^3/día$	2.000
$X_{PT}$	Coliformes/100 ml	10.000.000
$Q_R$	$m^3/día$	500
$X_R$	Coliformes/100 ml	1.000
$Q_{CR}$	$m^3/día$	2.500
$k_1$	1/día	1.3
$b$	Coliformes/100 ml/día	1.000

**Tabla E2.2**  
**Datos por Tramo de Río**

Tramo	Area ( $m^2$ )	Longitud (m)	Volumen ( $m^3$ )
1	3.0	700	2.100
2	3.5	1.000	3.500
3	3.2	500	1.600

**Figura E2.1**  
**Esquema de Sistema Analizado**

