

PAUTA A9

P1

a) Usando la expresión de vertederos de pared delgada, podemos escribir el caudal que sale por un ancho dX como:

$$q(X) \cdot dX = m\sqrt{2g} \cdot h^{3/2}(X) \cdot dX$$

Si la carga sobre el vertedero ($h = H - a$) varía linealmente con X , se puede parametrizar como:

$$h(X) = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{L} \cdot X$$

Reemplazando e integrando en la longitud del vertedero se llega a:

$$\int_0^L q \cdot dX = m\sqrt{2g} \cdot \int_0^L \left(h_0 + \frac{h_1 - h_0}{L} X \right) \cdot dX \Leftrightarrow Q = mL\sqrt{2g} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{h_1^{5/2} - h_0^{5/2}}{h_1 - h_0}$$

Hay que intentar llegar a la expresión que se desea demostrar. Para eso, definamos el parámetro K :

$$K = \frac{h_0}{h_1}$$

Con un desarrollo algebraico es posible llegar a:

$$Q = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1 - K^{5/2}}{1 - K} \right) mLh_1\sqrt{2gh_1}$$

$$\text{Definiendo: } \phi = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1 - K^{5/2}}{1 - K} \right)$$

Se llega finalmente a : $\Delta Q = \phi mL\sqrt{2gh_1}^{3/2}$

b) La función energía específica es: $E = h + \frac{q^2}{2gh^2}$

En este caso, q y h son funciones de X , por lo tanto: $E = E(h(X), q(X))$

Calculemos la derivada de E con respecto a X , usando la regla de la cadena:

$$\frac{dE}{dX} = \frac{dE}{dh} \cdot \frac{dh}{dX} + \frac{dE}{dq} \cdot \frac{dq}{dX} = \left(1 - \frac{q^2}{gh^3}\right) \cdot \frac{dh}{dX} + \left(\frac{q}{gh^2}\right) \cdot \frac{dq}{dX}$$

En el enunciado nos indican que la energía se puede considerar constante, por lo que el valor de la derivada anterior es igual a cero.

Además, recordemos que $Fr^2 = \frac{q^2}{gh^3}$

$$\text{Obtenemos: } \left(1 - Fr^2\right) \cdot \frac{dh}{dX} = -\left(\frac{q}{gh^2}\right) \cdot \frac{dq}{dX} \Leftrightarrow \frac{dh}{dX} = -\frac{\left(\frac{q}{gh^2}\right) \cdot \frac{dq}{dX}}{\left(1 - Fr^2\right)}$$

Del enunciado sabemos que $Fr < 1$ (régimen subcrítico) y $\frac{dq}{dX} < 0$

Por lo tanto, el lado derecho de la última ecuación es siempre positivo, y por lo tanto: $\frac{dh}{dX} > 0$

c) Despejando L de la expresión del enunciado:

$$L = \frac{\Delta Q}{\phi m \sqrt{2gh_1}^{3/2}}$$

$$H_1 \text{ corresponde a la altura normal} \Rightarrow h_1 = H_1 - a = 1,14 - 1 = 0,14[\text{m}]$$

$$H_0 \text{ se obtiene por la condición pedida, y su mínimo valor es } a + 0,1 = 1,1 [\text{m}]$$

$$\Rightarrow h_0 = H_0 - a = 0,1[\text{m}]$$

$$K = \frac{h_0}{h_1} = 0,714 \Rightarrow \phi = \frac{2}{5} \cdot \frac{1 - K^{5/2}}{1 - K} = 0,796 \Rightarrow L = \frac{0,3}{0,796 \cdot 0,434 \cdot \sqrt{2g} \cdot 0,14^{3/2}} = 3,744[\text{m}]$$

P2

a) Calculamos el eje hidráulico: $\frac{dh}{dX} = \frac{i - J}{1 - Fr^2}$; Canal casi horizontal: $i \approx 0$

Chèzy: $v = c\sqrt{RJ}$; Canal muy ancho: $R = h \Rightarrow J = \frac{v^2}{c^2 h}$;

$$\frac{dh}{dX} = \frac{-\frac{q^2}{c^2 h^3}}{1 - \frac{q^2}{gh^3}} = \frac{-\frac{q^2}{c^2}}{h^3 - \frac{q^2}{g}} \Leftrightarrow \left(h^3 - \frac{q^2}{g}\right)dh = -\frac{q^2}{c^2}dX$$

$$\int_{h_0}^{h_f} \left(h^3 - \frac{q^2}{g}\right)dh = -\left(\frac{q}{c}\right)^2 \int_{X_0}^{X_f} dX \Leftrightarrow \frac{h_f^4}{4} - \frac{q^2}{g}h_f - \left(\frac{h_0^4}{4} - \frac{q^2}{g}h_0\right) = -\left(\frac{q}{c}\right)^2(X_f - X_0)$$

Multiplicando la expresión por 4 y recordando que $h_C = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \Leftrightarrow h_C^3 = \frac{q^2}{g}$

$$\left(\frac{2q}{c}\right)^2 = 4h_C^3(h_f - h_0) - (h_f^4 - h_0^4)$$

b) La compuerta impone un torrente hacia aguas abajo, y el mar, un río hacia aguas arriba, por lo que habrá un resalto aguas abajo de la compuerta. La única forma de que varíe la altura de escurrimiento aguas arriba de la compuerta es que el resalto esté ahogado. El caso límite es la altura de marea que induce un resalto al pie, ya que si esta aumenta un poco, el resalto se ahoga.

Aguas abajo de la compuerta, la altura es $h_1 = \mu a = 0,183$ [m]. Con Belànger calculamos la altura conjugada, h_2 :

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + 8Fr^2} - 1 \right] = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{8q^2}{gh_1^3}} - 1 \right] = 0,967 \text{ [m]}$$

Luego, aplicamos la expresión de la parte (a) para encontrar la correspondiente altura de marea, h_3 . Resolviendo iterativamente se llega a $h_3 = 0,843$ [m]

De la expresión para la altura de la marea en función del tiempo, encontramos los valores de t para los cuales $h = h_3$.

$$h_3 = H + \alpha \cdot \sin\left[\pi\left(\frac{t}{k} - \beta\right)\right] \Leftrightarrow 0,843 = 0,7 + 0,2 \cdot \sin\left[\pi\left(\frac{t}{6} - 0,5\right)\right]$$

$$0,715 = \sin\left[\pi\left(\frac{t}{6} - 0,5\right)\right] \Leftrightarrow 0,796 = \pi\left(\frac{t}{6} - 0,5\right)$$

La función seno es sinusoidal, la ecuación tiene 4 soluciones, que dan origen a 2 intervalos:

$$t = [4,52; 7,48] \text{ y } t = [16,52; 19,48]$$

c) Obviamente, la mayor altura se tiene para la hora en que la marea es más alta, lo que ocurre en los puntos medios de los intervalos anteriores, a las 6 y 18 horas. La altura es:

$$h(6) = 0,7 + 0,2 \cdot \sin\left[\pi\left(\frac{6}{6} - 0,5\right)\right] = 0,9[\text{m}] = h(18)$$

Calculamos h_2 con h_3 y la ecuación para el eje. Se obtiene $h_2 = 1,005 [\text{m}]$

La altura aguas arriba de la compuerta la obtendremos por conservación de energía.

Como tenemos un resalto ahogado, necesitamos calcular la altura de presión, h' , en la sección (1), lo que hacemos igualando momentas:

$$m_2 = m_1 \Leftrightarrow \frac{h_2^2}{2} + \frac{q^2}{gh_2} = \frac{h'^2}{2} + \frac{q^2}{g\mu a} \Leftrightarrow h' = 0,313[\text{m}]$$

Ahora podemos calcular la energía en (1):

$$E_1 = h' + \frac{q^2}{2g(\mu a)^2} = 1,836[\text{m}]$$

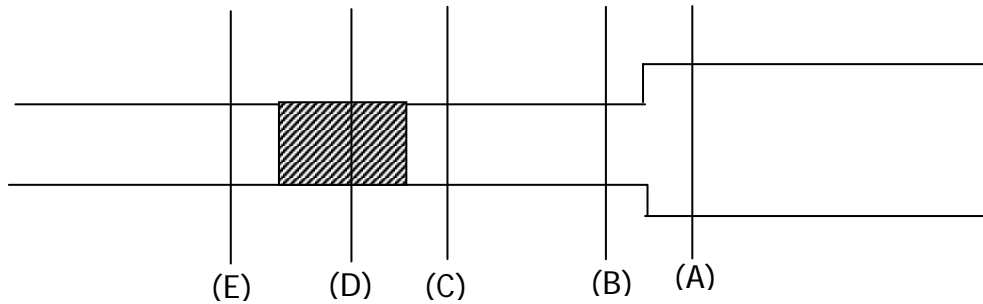
Y resolviendo esta ecuación encontramos la altura requerida (altura de río)

$$1,836 = h + \frac{q^2}{2gh^2} \Rightarrow h = 1,821[\text{m}]$$

d) Aguas abajo de la compuerta sólo se puede tener un eje H_2 (río en pendiente horizontal).

No se logra alcanzar la altura normal, ya que ésta es infinita en pendiente horizontal.

P3

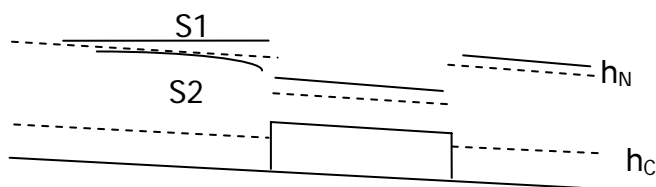


a) Lo primero es determinar las alturas crítica y normal, lo que se puede hacer sólo en el tramo 1, ya que en el tramo 2 desconocemos el ancho.

$$h_{C1} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = 0,742[m] \quad \frac{Qn}{\sqrt{i}} = \frac{(bh_{N1})^{5/3}}{(b + 2h_{N1})^{2/3}} \Rightarrow h_{N1} = 1,831 > h_C \Rightarrow \text{P.S.}$$

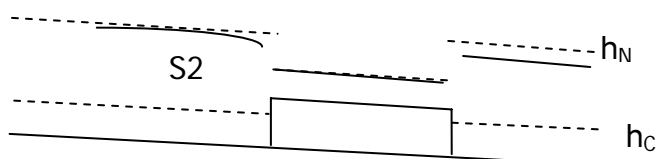
Para analizar los posibles ejes hidráulicos, hay que ponerse en distintos casos variando el ancho del tramo 2, b_2 . Básicamente hay dos casos, según haya o no crisis sobre la grada, lo que depende de b_2 . Además, sólo vale la pena analizar lo que ocurre en el tramo 1, ya que en el 2 siempre se tendrá altura normal, por tratarse de pendiente suave.

Si b_2 es tal que no hay crisis sobre la grada:



Aguas abajo de la grada se tendrá una altura que es la que impone el río del tramo 2 (no es la normal), pero como el espacio entre las secciones C y B es muy corto, no alcanza a desarrollarse un eje, la energía se mantiene constante y por ende la altura de escurrimiento también. Sobre la grada se tiene una altura mayor que la crítica. Aguas arriba de la grada puede tenerse un S1 o bien un S2.

Si b_2 es tal que sí hay crisis sobre la grada:



Aguas abajo de la grada se tiene la altura impuesta por el río del tramo 2. Sobre la grada se tiene altura crítica, y aguas arriba de ésta, un eje S2.

b) El ancho desconocido del tramo 2 va a imponer una altura normal en ese tramo, luego, utilizando la ecuación adimensional derivada del TCM, se puede conocer la altura de escurrimiento en B que será igual a la de C. Esa altura es de la que provocará que haya o no crisis sobre la grada.

Veamos el caso límite, que es cuando se alcanza crisis sobre la grada, $h_D = h_{C1}$. h_C (que es la altura en la sección C, no confundir con altura crítica) lo obtenemos con la ecuación:

$$\frac{n}{X_0} + \frac{(X_0 + K)^2}{2} = \frac{1}{X_1} + \frac{X_1^2}{2}, \text{ notar que en este caso tenemos } X' = X_0 + K$$

$$X_0 = \frac{h_D}{h_{C1}} = 1; \quad K = \frac{a}{h_{C1}} = 1,348; \quad n = 1$$

Resolviendo en forma iterativa llegamos a: $X_0 = 2,597 \Rightarrow h_0 = 1,927[m]$

Ahora hay que buscar un b_2 tal que h_{N2} imponga una altura de 1,927 en B y C.

¿Pero este ancho será mayor o menor a b_1 ? ¿El cambio de ancho será un ensanche o un angostamiento?

Es posible saber esto a priori, con el siguiente razonamiento: Si no hubiera cambio de ancho, se tendría $h_C = h_B = h_A = h_{N1} = 1,831 < 1,927$, con lo que no habría influencia de aguas abajo. A nosotros nos interesa el caso en que $h_B = h_C = 1,927 [m]$. Por lo tanto, si hacemos que el tramo 2 sea más angosto, la altura normal aumentará su valor, y lo mismo ocurrirá con h_B y h_C , hasta lograr nuestro objetivo. Por lo tanto, se trata de un angostamiento brusco, i.e., $b_2 < b_1$

Para resolver el angostamiento, usamos las figuras de angostamiento brusco de los apuntes. La idea es encontrar el valor de b_2 tal que $h_B = 1,927 [m]$

$$X_0 = \frac{h_B}{h_{C2}}; \quad X_1 = \frac{h_A}{h_{C2}}; \quad n = \frac{b_1}{b_2}; \quad K = \frac{a}{h_{C2}} = 0$$

Como no conocemos b_2 , no conocemos h_{C2} ni h_{N2} , y por ende no podemos calcular X_0 , X_1 ni n .

Por lo tanto, hay que darse un valor de b_2 , usarlo para calcular el resto de los parámetros y verificar, con las figuras, que se cumpla la relación del angostamiento brusco.

Si nos fijamos, h_B es parecido a h_{N2} , por lo tanto, b_2 no debiera ser mucho menor que b_1 . Por lo tanto es buena idea empezar a iterar con valores cercanos a b_2 .

En este caso, cuando $b_2 = 2,88 \text{ [m]}$, se tiene:

$$q_2 = \frac{Q}{b_2} = 2,08 \text{ [m}^3\text{/s/m]} \quad h_{C2} = \left(\frac{q_2^2}{g} \right)^{1/3} = 0,762 \text{ [m]}$$

$$\frac{Qn}{\sqrt{i}} = \frac{(b_2 h_{N2})^{5/3}}{(b_2 + h_{N2})^{2/3}} \Rightarrow h_{N2} = 1,91 \text{ [m]} > h_{C2} \Leftrightarrow \text{P.S.}$$

$$X_0 = \frac{h_B}{h_{C2}} = 2,53; \quad X_1 = \frac{h_A}{h_{C2}} = 2,402; \quad n = \frac{b_1}{b_2} = 1,04; \quad K = \frac{a}{h_{C2}} = 0$$

Se entra a la figura que corresponde a $n = 1$. Se fija $K = 0$ en el eje Y y $X_1 = 2,5$ en el eje X. Se ve que la curva que pasa por este punto corresponde a $X_0 = 2,5$, por lo que este ancho es una buena aproximación.