

# VELOCIDAD DE ONDAS SUPERFICIALES EN CANALES

CI41A HIDRAULICA

Prof. Y. Niño, Sem. Primavera 2003

Consideremos un volumen de líquido de profundidad  $h$  y que se extiende indefinidamente en el plano horizontal. Supongamos que en la superficie libre existe una perturbación consistente en una onda de pequeña amplitud  $\eta(x, t)$ , de longitud de onda  $L$ , que se mueve con celeridad  $c$  en la dirección  $x$  (ver Fig. 1).

Considerando fluido ideal es posible plantear la ecuación de Euler:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla B = 0 \quad (1)$$

donde  $g$  denota la aceleración de gravedad,  $\vec{v}$  representa la velocidad del flujo y  $B$  el Bernoulli. Haciendo uso de la teoría de flujo potencial, el vector velocidad puede definirse en términos de una función potencial  $\phi(x, t)$ , tal que:

$$\vec{v} = -\nabla \phi \quad (2)$$

Para cumplir continuidad se requiere que  $\phi$  satisfaga la ecuación de Laplace:  $\nabla^2 \phi = 0$ .

De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$\nabla \left( -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + B \right) = 0 \quad (3)$$

o lo que es lo mismo:

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + B = F(t) \quad (4)$$

donde  $F$  es una función del tiempo, independiente de  $x$ .

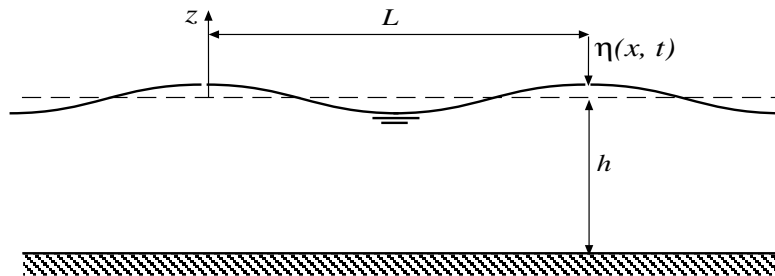


Figura 1: Onda superficial de pequeña amplitud en líquido de profundidad  $h$ .

Expandiendo el Bernoulli,  $B = v^2/2g + z + p/\gamma$ , donde  $z$  denota un eje vertical positivo hacia arriba (Fig. 1),  $v$  es el módulo de la velocidad y  $p/\gamma$  es la altura de presión, se llega a:

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = F(t) \quad (5)$$

Considerando ondas de pequeña amplitud, la ecuación anterior puede linearizarse suponiendo que  $v^2/2g \approx 0$ . Así se obtiene:

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + z + \frac{p}{\gamma} = F(t) \quad (6)$$

Evaluando esta ecuación en la superficie libre,  $z = \eta$ , entonces  $p(z = \eta) = 0$  (trabajando con presiones relativas) y se tiene:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t}|_{(z=\eta)} + g \eta = 0 \quad (7)$$

donde se ha supuesto, sin perder generalidad que  $F(t) = 0$ .

Por otro lado, en la superficie libre se cumple para la componente vertical de la velocidad,  $w$ :

$$w(z = \eta) = -\frac{\partial \phi}{\partial z}|_{(z=\eta)} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (8)$$

Ahora derivando (7) en función del tiempo y reemplazando (8) se obtiene una ecuación para la función potencial  $\phi$ , válida para  $z = \eta \approx 0$ , que caracteriza el flujo potencial asociado a la onda superficial de pequeña amplitud:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

Puede verificarse que la siguiente función satisface la ecuación anterior:

$$\phi = -\frac{g a}{\beta} \frac{\cosh(\alpha(h+z))}{\cosh(\alpha h)} \cos(\alpha x - \beta t) \quad (10)$$

con

$$\eta = a \sin(\alpha x - \beta t) \quad (11)$$

donde  $a$  es la amplitud de la onda superficial y corresponde a un número de pequeña magnitud, y  $\alpha$  y  $\beta$  están relacionados con la longitud de onda,  $L$ , y el período,  $T$ , de la onda superficial, de modo que:  $\alpha = 2\pi/L$  y  $\beta = 2\pi/T$ , siempre y cuando se cumpla:

$$c = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{g L}{2\pi} \tanh(2\pi \frac{h}{L})} \quad (12)$$

La función  $\phi$  dada por (10) satisface además la ecuación de Laplace (es decir continuidad) y la condición de superficie sólida en el fondo ( $z = -h$ , ver Fig. 1):

$$w(z = -h) = -\frac{\partial \phi}{\partial z}|_{(z=-h)} = 0 \quad (13)$$

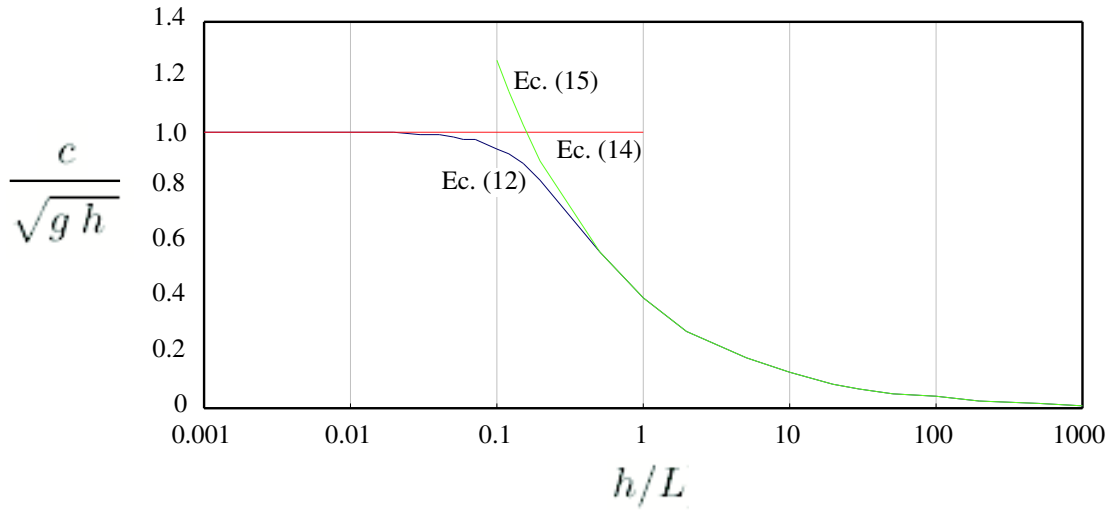


Figura 2: Celeridad adimensional de ondas superficiales de pequeña amplitud en cuerpos de agua de profundidad relativa a la longitud de onda,  $h/L$ .

En (12),  $c$  representa la celeridad de las ondas superficiales como puede deducirse de la estructura de la onda superficial dada por (11). Pueden identificarse 2 casos distintos. El primero corresponde a ondas largas en un cuerpo de agua de baja profundidad, tal que  $h/L \ll 1$ . En ese caso se cumple también  $2\pi h/L \ll 1$  y por lo tanto  $\tanh(2\pi h/L) \approx 2\pi h/L$ , de modo que:

$$c = \sqrt{gh} \quad (14)$$

El segundo caso corresponde a ondas superficiales en un cuerpo de agua de gran profundidad (por ejemplo el océano), tal que  $h/L \gg 1$ . En ese caso se cumple  $\tanh(2\pi h/L) \approx 1$ , de modo que:

$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \quad (15)$$

En la Fig. 2 se muestra la celeridad de la onda dada por (12), graficada en función de los parámetros adimensionales  $c/\sqrt{gh}$  y  $h/L$ , y los resultados asintóticos dados por (14) y (15). Esta figura puede utilizarse para identificar los rangos de validez de estas últimas ecuaciones en términos de los valores del parámetro  $h/L$ .

El caso típico encontrado en canales es el de ondas largas en un cuerpo de agua de relativamente baja profundidad, donde la celeridad de las perturbaciones superficiales está dada por  $\sqrt{gh}$ .