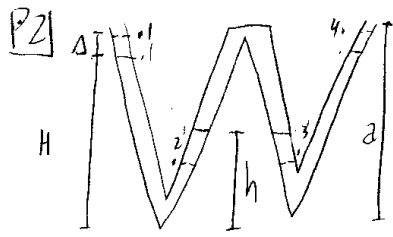


# PAUSA CONTROL #1

1/4



Por hidrostática, la altura de la rama de la derecha también es  $H$

Llamando  $z$  a la coordenada de posición de la izquierda e  $y$  a la de la derecha

$$\text{Euler entre (1) y (2): } \frac{(H+h)}{g \sin \alpha} \cdot \frac{du}{dt} + B_2 - B_1 + f \frac{(H+h)}{D \sin \alpha} \cdot \frac{u^2}{2g} = 0$$

$$B_2 = h - \Delta + z + \frac{u^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} ; B_1 = H + \Delta - z + \frac{u^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{(H+h)}{g \sin \alpha} \cdot \frac{du}{dt} + h - \Delta + z + \frac{u^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} - H + \Delta - z - \frac{u^2}{2g} + f \frac{(H+h)}{D \sin \alpha} \cdot \frac{u^2}{2g} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(H+h)}{g \sin \alpha} \cdot \frac{du}{dt} + h - H + 2z - 2\Delta + \frac{P_2}{\gamma} + f \frac{(H+h)}{D \sin \alpha} \cdot \frac{u^2}{2g} = 0$$

Euler entre (3) y (4), es análogo y, más aún, es la misma ecuación, ya que, al ser el mismo fluido y tener las mismas condiciones iniciales, sus velocidades son iguales en todo momento y, por ende, sus posiciones también

Por lo tanto, no es necesario hacer Euler entre (4) y (3). De todos modos, si alguien no se da cuenta, llamando  $v$  a la velocidad por la rama derecha:

$$\text{Euler entre (4) y (3): } \frac{(H+h)}{g \sin \alpha} \cdot \frac{dv}{dt} + h - H + 2y - 2\Delta + \frac{P_2}{\gamma} + f \frac{(H+h)}{D \sin \alpha} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0$$

$$\text{Régimen laminar} \Rightarrow f = \frac{64}{Re} = \frac{64\gamma}{VD}$$

Hay que determinar las presiones: Proceso Isotérmico:  $P \cdot V = cte$ .

Inicialmente: Por Hidrostática:  $P_0 = \rho(H-h) + P_{atm}$ ;  $V_0 = \frac{\pi D^2}{4} \frac{z(a-h)}{\sin \alpha} = \frac{\pi D^2 (a-h)}{2 \sin \alpha}$

En un instante cualquiera:  $V = \frac{\pi D^2}{4} \frac{z(a-h-z)}{\sin \alpha} = \frac{\pi D^2 (a-h-z)}{2 \sin \alpha}$

$$P_0 V_0 = P_z V \Leftrightarrow [\rho(H-h) + P_{atm}] \frac{\pi D^2 (a-h)}{2 \sin \alpha} = \frac{\pi D^2 (a-h-z)}{2 \sin \alpha} \cdot P_z \Leftrightarrow P_z = \frac{[\rho(H-h) + P_{atm}](a-h)}{(a-h-z)}$$

Pero para la ec. de Euler necesitamos la relativa  $\Rightarrow P_z = \frac{[\rho(H-h) + P_{atm}](z-h) - P_{atm}}{(a-h-z)}$

Además, se puede establecer la siguiente relación:  $\frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{dz}{dt} = u \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha} \frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt}$

Con lo que, la ecuación que rige el movimiento del fluido dentro del tubo queda como:

$$\frac{(H+h)}{g \sin \alpha} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{z(z+h-H-z\Delta)}{D^2 \sin \alpha g} + \frac{[\rho(H-h) + P_{atm}](a-h) - P_{atm}}{\rho(a-h-z)} + \frac{32 \nu (H+h)}{D^2 \sin \alpha g} \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

Condiciones de Borde: En  $t=0$ ,  $z=0$ ,  $\frac{dz}{dt}=0$

b) Reescribiendo el término de la presión como:  $\frac{[\rho(H-h) + P_{atm}](a-h)}{\rho(a-h-z)} = \left[ \frac{(H-h) + \frac{P_{atm}}{\rho}}{a-h} \right] \cdot \frac{(a-h)}{(a-h-z)}$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{(H-h) + \frac{P_{atm}}{\rho}}{a-h} \right] \cdot \left( \frac{1}{1 - \frac{z}{a-h}} \right); \frac{z}{a-h} \ll 1 \Rightarrow \left[ \frac{(H-h) + \frac{P_{atm}}{\rho}}{a-h} \right] \left( 1 + \frac{z}{a-h} \right)$$

Reordenando:  $\frac{(H+h)}{g \sin \alpha} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{32 \nu (H+h)}{D^2 \sin \alpha g} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{z(z+h-H-z\Delta)}{D^2 \sin \alpha g} + \frac{(H-h)z}{(a-h)} + \frac{P_{atm}z}{\rho(a-h)} - \frac{P_{atm}z}{\rho(a-h)} = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{(H+h)}{g \sin \alpha} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}}_A + \underbrace{\frac{32 \nu (H+h)}{D^2 \sin \alpha g} \cdot \frac{dz}{dt}}_B + \underbrace{\left( 2 + \frac{\rho(H-h) + P_{atm}}{\rho(a-h)} \right) z}_{C} - \underbrace{z\Delta}_D = 0$$

$$\Rightarrow A \frac{d^2 z}{dt^2} + B \frac{dz}{dt} + (C \cdot z + D) = 0 : \text{cambio de variables: } (z + D) = Cy \Rightarrow y = \frac{z + D}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} ; \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} \Rightarrow A \ddot{y} + B \dot{y} + Cy = 0 \rightarrow \text{polinomio característico}$$

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} ; m = \frac{+B}{2A} ; n = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \Rightarrow y = \alpha e^{(-m+n)t} + \beta e^{(-m-n)t}$$

$$\Rightarrow z(t) = \alpha e^{(-m+n)t} + \beta e^{(-m-n)t} + \frac{D}{C}$$

$$C \cdot z(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = \alpha + \beta + \frac{D}{C} \Rightarrow \alpha = -\beta - \frac{D}{C}$$

$$\frac{dz}{dt} = 0 \Leftrightarrow 0 = \alpha(-m+n) + \beta(-m-n) + \frac{D}{C}$$

$$\Leftrightarrow \left(-\beta - \frac{D}{C}\right)(-m+n) + \beta(-m-n) + \frac{D}{C} = 0 \Leftrightarrow 2\beta n = \frac{D}{C}(-m+n-1) \Leftrightarrow \beta = \frac{D}{C} \frac{(n-m-1)}{2n}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{D}{C} \frac{(n-m-1)}{2n} - \frac{D}{C} = -\frac{D}{C} \left[ \frac{m+n-1}{2n} \right]$$

Para saber qué tipo de movimiento tendremos, analizamos la solución del polinomio característico

$$B^2 = \left[ \frac{32 \cdot 5 \cdot (4+h)}{0.8^2 \cdot \sin^2 \alpha} \right]^2 = \left[ \frac{32 \cdot 5 \cdot 10^7 (2+0.8)}{0.02^2 \cdot \sin^2(30^\circ) \cdot 9.8} \right]^2 = 1.66 \cdot 10^{13}$$

$$4AC = \frac{4(H+h)}{g \cdot \sin \alpha} \left( 2 + \frac{\eta(H-h) + P_{axm}}{\eta(z-h)} \right) = 32.05$$

$B^2 < 4AC \Rightarrow$  solución compleja;  $n \neq f \Rightarrow$  Movimiento oscilatorio amortiguado