Computación Gráfica
Transformaciones de Proyección

Prof. María Cecilia Rivara
mcrivara@dcc.uchile.cl
Semestre 2003/2

Proceso visualización 3D

Modelo Coord. Mundo 3D → .... → Visualización Raster 2D

Necesitamos
- Proyecciones: transformar objetos 3D en proyecciones en plano 2D
- Volumen de la vista
- Plano de proyección (viewport en el dispositivo)

Conceptualmente

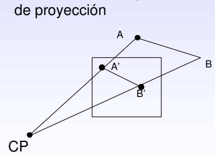
→ Recorte (clipping) Contra volumen de la vista → Proyección a plano de proyección → Transformación a coordenadas del Dispositivo →

Proyecciones Geométricas Planas

Conceptos: proyectores rectos, centro de proyección, plano de proyección

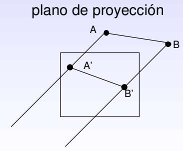
Proyecciones

Perspectiva
Centro de proyección a distancia finita del plano de proyección



(proyectores convergen)

Paralela
Centro de proyección a distancia infinita del plano de proyección

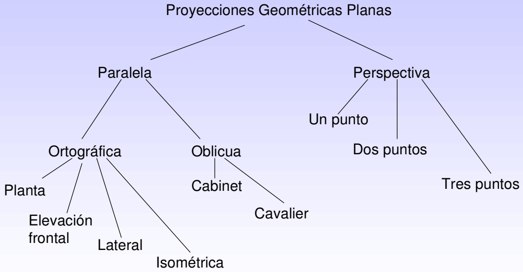


CP en el infinito
(proyectores paralelos)

Perspectiva

- En la proyección, el tamaño del objeto varía inversamente con la distancia del objeto al centro de proyección.
- Objetos parecen más realistas
- No es útil par almacenar forma y medidas exactas de los objetos. Las líneas paralelas en general no se mantienen paralelas.
- Proyecciones de líneas paralelas que no son paralelas al plano de proyección convergen en un punto de anulación (vanishing point)

Clasificación

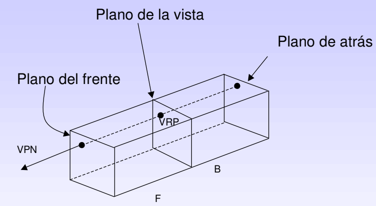


Proyección Perspectiva

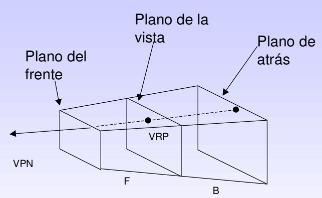
Ejes principales: ejes del sistema de coordenadas
- Un punto. El plano de proyección corta un eje principal (plano de proyección paralelo a un plano del sistema de coordenadas).
- Dos puntos. Plano de proyección corta dos ejes principales.
- Tres puntos Plano de proyección corta los tres ejes principales.

Proyección Paralela

- Ortográfica. Dirección de proyección es normal al plano de proyección
  - Planta, elevación, lateral son usadas en ingeniería Plano de proyección es perpendicular a eje principal
  - Isométrica. Normal al plano de proyección forma ángulos iguales con ejes principales. Vistas más reales
- Oblicua. Los proyectores no son normales al plano de proyección. Plano de proyección es normal a un eje principal
  - Cavalier. Proyectores forman ángulo de 45º con plano de proyección
  - Cabinet. Proyectores forman ángulo de arctg (2) = 63.4º



Volumen de la vista truncado para proyección paralela ortográfica



Volumen de la vista truncado para proyección en perspectiva

Plano de Proyección y Sistema de Coordenadas

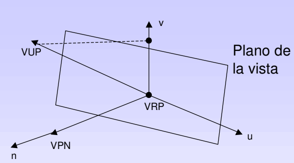
¿Cómo se definen en Computación Gráfica?

Plano de Proyección

- VRP (view reference point) Punto sobre el plano
- VPN (view plano normal) Normal al plano

VRC Sistema de coordenadas de referencia de la vista (u, v, n)

- VRP: Origen del sistema
- VPN: Un eje del sistema (n)
- VUP (view up vector): Determina el eje de dirección hacia arriba. La proyección de VUP sobre el plano de la vista define el eje v.



Ventana de visualización. Definida por límites (u_{min},v_{min})

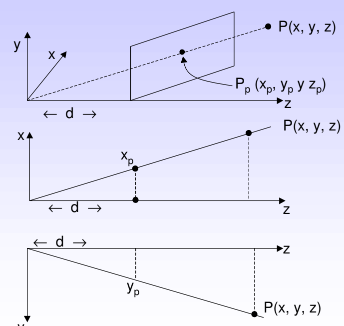
(u_{max}, v_{max}). No necesariamente centrada en CW (centro de la ventana)

Proyección. Se define mediante PRP (projection reference point) e indicador del tipo de proyección

- Si es perspectiva PRP es el centro de proyección
- Si es paralela, la dirección de proyección (DOP) va desde PRP a CW

Perspectiva

Supuesto: plano de proyección z=d



Triángulos semejantes

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z} \Rightarrow x_p = \frac{x}{z/d}$$

$$\frac{y_p}{d} = \frac{y}{z} \Rightarrow y_p = \frac{y}{z/d}$$

Matricialmente $\qquad M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$

Multiplicando M_{per} por $\quad P = [x\ y\ z\ 1]^T$

$M_{per}\ P = [x\ \ y\ \ z\ \ \ z/d]^T \qquad w = z/d \neq 1$

Luego para recuperar el punto en |R³ es necesario dividir por w.

Luego $(x_p, y_p, z_p) = \left(\frac{x}{x/d}, \frac{y}{z/d}, d\right)$

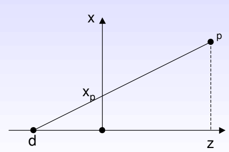
Perspectiva (Otra deducción)

plano de proyección z = 0, centro de proyección en z = -d

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z+d} \qquad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z+d}$$

$$x_p = \frac{x}{z/d+1} \qquad y_p = \frac{y}{z/d+1}$$

$$M'_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix}$$



En este caso d puede tender a infinito

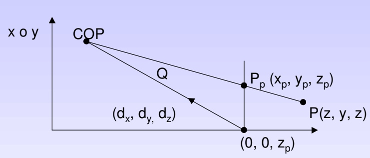
Proyección Ortográfica

Plano de proyección en z = 0

dirección de proyección ≡ normal al plano de proyección

$$M_{ort} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deducción general que integra proyecciones en paralela y perspectiva



- plano de proyección $z = z_p$
- centro de proyección COP a distancia Q del punto $(0, 0, z_p)$
- dirección desde $(0, 0, z_p)$ a COP dado por vector de dirección normalizado (d_x, d_y, d_z)

Ec. paramétrica línea recta de COP a P

$$P_L(t) = COP + t\,(p - COP) \quad 0 \leq t \leq 1$$

Además $\quad COP = (0, 0, z_p) + Q\,(d_x, d_y, d_z) = (d_x, d_y, z_p + Qd_z)$

Luego para P' cualquiera sobre la línea

$x' = Qd_x + (x - Qd_x)\,t$

$y' = Qd_y + (y - Qd_y)\,t$

$z' = (z + Qd_z) + (z - (z_p + Qd_z))\,t$

P_p se encuentra en la intersección de $P_L(t)$ con plano de proyección $z = z_p$. Luego haciendo $z' = z_p$ y resolviendo para t

$$t = \frac{z_p - (z_p + Qd_z)}{z - (z_p + Qd_z)}$$

Luego:

$$x_p = \frac{\frac{x - z\, d_x}{d_z} + \frac{z_p\, d_x}{d_z}}{D}$$

$$y_p = \frac{\frac{y - z\, d_y}{d_z} + z_p \frac{dy}{d_z}}{D}$$

$$z_p = \frac{\frac{-z\, z_p}{Qd_z} + \frac{z_p^{2} + z_p\, Qd_z}{Qd_z}}{D}$$

$$\text{donde } D = \frac{z_p - z}{Qd_z} + 1$$

(se trabajó sobre identidad $z_p = z_p$ para tener denominador D)

$$M_{general} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{d_x}{d_z} & z_p \frac{d_x}{d_z} \\ 0 & 1 & -\frac{d_y}{d_z} & z_p \frac{d_y}{d_z} \\ 0 & 0 & -\frac{z_p}{Qd_z} & \left(\frac{z_p^{2}}{Qd_z} + z_p\right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Qd_z} & \left(\frac{z_p}{Qd_z} + 1\right) \end{bmatrix}$$

Incluye M_{per} M'_{per} M_{ort}

	z_p	Q	(d_x, d_y, d_z)
M_{ort}	0	∞	(0, 0, -1)
M_{per}	d	d	(0, 0, -1)
M'_{per}	0	d	(0, 0, -1)

$Q \neq \infty \Rightarrow$ Proyección perspectiva de 1 pto.

Pto. de anulación: Se calcula mediante el producto

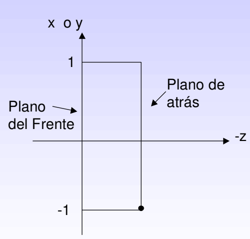
$$M_{general} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y se divide por w}$$

$\Rightarrow$ $x = Qd_x$ $\quad y = Qd_y$ $\quad z = z_p$

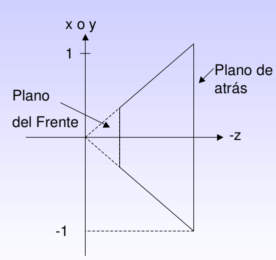
Implementación de Proyecciones en CG

- Se utilizan volúmenes normalizados o canónicos de la vista; operaciones de clipping son más fáciles y eficientes
- Se usan transformaciones de normalización N_{par} y N_{per} que transforman volumen de la vista arbitrario (paralelo o en perspectiva) en sus respectivos volúmenes canónicos.

Dos volúmenes canónicos de la vista

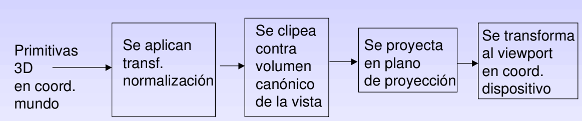


Paralela



Perspectiva

Implementación de visualización 3D



Proyección Paralela

Derivación de N_{par} (caso oblicuo)

Incluye transformaciones shear

1. Traslade VRP al origen
2. Rote VRC de modo que eje n (VPN) queda sobre eje z. El eje u es el eje x y el eje v el eje y.
3. Shear tal que dirección de proyección sea paralela al eje z
4. Traslade y escale al volumen de la vista en proyección paralela

Proyección Perspectiva

Derivación del N_{per}

1 Traslade VRP al origen
2 Rote VRP hasta que eje n (VPN) sea el eje z.
El eje u es el eje x y el eje v el eje y
3 Traslade tal que centro de proyección COP esté en el origen
4 Shear tal que la línea del centro del volumen de la vista sea el eje z
5 Escale tal que el volumen de la vista sea el volumen canónico en perspectiva

Clipping contra el volumen canónico de la vista

- Se usan extensiones “directas” de los algoritmos de clipping de Cohen-Sutherland y Cyrus-Beck en 2D
- Clipping puede hacerse en coordenadas homogéneas
  - Se puede transformar volumen canónico en perspectiva a volumen canónico de proyección paralela. Se maneja así clipping optimizado.
    Para asegurar resultados correctos debe hacerse en coordenadas homogéneas.
  - Transformaciones poco frecuentes y uso de splines racionales pueden tener $w < 0$. Para obtener resultados correctos se necesitan coord. Homogéneas.