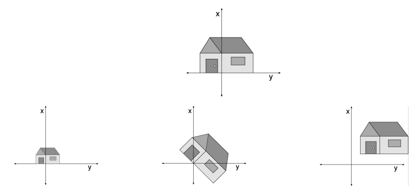
Computación Gráfica

Transformaciones en 2D y 3D

Prof. María Cecilia Rivara
mcrivara@dcc.uchile.cl
Semestre 2003/2

Motivación



Escalamiento (50%) Rotación (45º)- Traslación

Transformación	Representación vectorial / matricial P, P' puntos en el plano $P = [x, y]^T$ $P' = [x', y']^T$
Traslación	$P' = P + T$ $T = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$ vector de traslación
Escalamiento	$P' = SP$ $S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$ matriz de escalamierto
Rotación alrededor del origen en ángulo θ (positivo en sentido contrario punteros reloj)	$P' = RP$ $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ matriz de rotación $RR^T = I$ matriz ortogonal preserva ángulos y longitudes

TRASLACIÓN NO TIENE REPRESENTACIÓN MATRICIAL EN IR^2

No se puede representar en base a multiplicación. DESEABLE!

Coordenadas Homogéneas

- Desarrolladas en Geometría (E. A. Maxwell 1946)

$P = (x, y)$ en IR^2 $\to P_h = (x_h, y_h, w)$

Representación homogénea de P, donde $x = \dfrac{x_h}{w}, \; y = \dfrac{y_h}{w}$

- Propiedades / restricciones
  - Hay infinitas representaciones para un mismo punto
    (2,3,6) = 4,6,12) = (1/3, 1/2, 1)
  - Con frecuencia se normaliza w =1
  - Al menos una coordenada es obligatoriamente ≠ 0
  - El punto (x, y, 0) representa punto en el infinito en la dirección (x, y)
- Estas coordenadas "homogeinizan" el tratamiento del infinito
- EN COMPUTACIÓN GRÁFICA PERMITEN EL TRATO HOMOGÉNEO DE TODAS LAS TRANSFORMACIONES COMO MATRICES

Transformaciones Elementales 2D en Coordenadas Homogéneas

Puntos $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$ Matrices 3 x3

Traslación $T(dx, dy) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P' = TP$, $T^{-1} = T(-d_x, -d_y)$

Escalamiento $S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P' = SP$, $S^{-1} = S(1/s_x, 1/s_y)$

Rotación $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P' = RP$, $R^{-1} = R^T$

Shearing $SHx = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $Shy = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Composición de Transformaciones 2D

- Se combinan las matrices elementales para producir el efecto deseado
- Se gana eficiencia usando la matriz resultante

Ejemplo: Rotación de un objeto alrededor de punto arbitrario $P_1(x_1, y_1)$

Pasos:

1. Traslade P_1 al origen
2. Rote alrededor del origen
3. Traslade para que el punto en el origen vuelva a P_1

$T(x_1, y_1) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_1, -y_1) =$ M Matriz Resultante

3º 2º 1º

SON CONMUTATIVAS LAS TRANSFORMACIONES?

No siempre!

Son conmutativas en DOS dimensiones

- Traslaciones entre sí
- Escalamiento entre sí
- Rotaciones entre sí
- Escalamiento ($s_x = s_y$) y Rotación

Productos arbitrarios de Transformaciones

- Productos de Rotaciones preservan ángulos y longitudes
- Productos de secuencias arbitrarias de transformaciones, preservan paralelismo de las líneas, pero no longitudes ni ángulos

CUIDADO!

Algunos textos de CG, incluyendo primera adición de Foley-van Dam, usan la convención de premultiplicar matrices por vectores fila

$$[x \;\; y \;\; 1] \quad \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

Se necesita transponer las matrices para pasar de una convención a la otra.

Composición de Transformaciones

Ejercicios

1. Demuestre que puede transformar un segmento de línea, transformando sus puntos extremos y construyendo un nuevo segmento de línea entre los puntos transformados.
2. Demuestre que dos rotaciones sucesivas en 2D son aditivas: $R(\theta_1) \,.\, R(\theta)$ 0 $R(\theta_1 + \theta_2)$
3. Demuestre que en 2D, el escalamiento y la rotación conmutan si $s_x = s_y$. y que si $s_x \neq s_y$ esto no ocurre.
4. Encuentre una expresión para el error acumulado en θ y el número de rotaciones incrementales realizadas

Transformaciones Elementales 3D en Coordenadas Homogéneas

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow P_h = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ w \end{bmatrix}$$

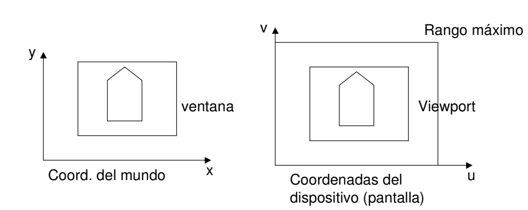
P_h es representación homogénea de P

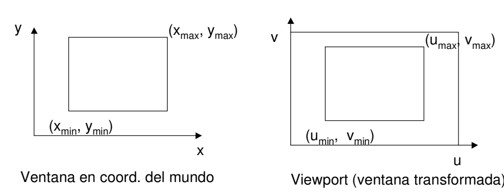
$$\text{donde} \quad x = \frac{x_h}{w_h}, \; y = \frac{y_h}{w}, \; z = \frac{z_h}{w}$$

Punto (0, 0, 0, 0) no se permite
Punto (a, b, c, 0) representa punto en el infinito
Transformaciones son matrices de 4x4

Aplicación

Transformación Window-Viewport simple





Pasos:
1) trasladar ventana al origen
2) escalar ventana al tamaño del viewport (equivalente a cambiar de sistema de coordenadas)
3) trasladar por (u_{min}, v_{min})

Transformaciones Elementales 3D en Coordenadas Homogénea

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow P_h = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ w \end{bmatrix}$$

P_h es representación homogénea de P

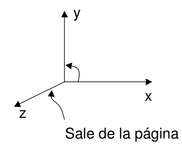
$$\text{donde} \quad x = \frac{x_h}{w_h},\ y = \frac{y_h}{w},\ z = \frac{z_h}{w}$$

Punto (0, 0, 0, 0) no se permite
Punto (a, b, c, 0) representa punto en el infinito
Transformaciones son matrices de 4x4

Tres dimensiones

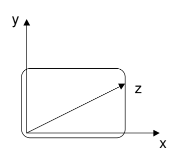
Sistemas de coordenadas (2 alternativas)

- Orientado a la derecha
- Convención estándar



- Orientado a la izquierda

asociado de manera natural al manejo de la pantalla: los z mayores están más lejos del punto de vista



Obs: rotaciones positivas se mueven en sentido de los punteros del reloj miradas desde el eje positivo (son idénticas en ambos sistemas)

Transformaciones Elementales 3D (Coord. Homog.)

Traslación $\quad T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = (-d_x, -d_y, -d_z)$

Escalamiento $\quad S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z}\right)$

Rotaciones (en ángulo θ)

alrededor eje z $\quad Rz(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

alrededor eje x $\quad Rx(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

alrededor eje y $\quad Ry(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \mathrm{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo : rotación de "eje x" en 90º alrededor eje z

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eje x eje y

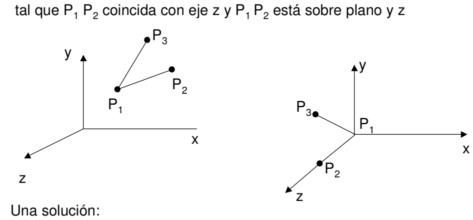
Shearing $SH_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_{hx} & 0 \\ 0 & 1 & s_{hy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ etc.

Composición de transformaciones

Matriz agregada $M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{13} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{33} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Traslaciones agregadas

rotaciones y
escalamiento
agregados

Ejercicio: Trasladar segmentos orientados $P_1 P_2$ y $P_1 P_3$
tal que $P_1 P_2$ coincida con eje z y $P_1 P_2$ está sobre plano y z



Una solución:

1. Traslado P1 al origen
2. Rote alrededor del eje y hasta que $P_1 P_2$ quede sobre plano y z
3. Rote alrededor del eje x hasta que $P_1 P_2$ quede sobre el eje z
4. Rote alrededor del eje z hasta que $P_1 P_3$ quede en el plano y z

Ejercicio propuesto: rotación alrededor de eje arbitrario

IMPORTANTE: En 3D las rotaciones no son conmutativas!

Una representación de poliedro: matriz tal que sus columnas son las coordenadas homogéneas de sus vértices.

Proceso visualización 3D

Modelo Coord. Mundo 3D → .... → Visualización Raster 2D

Necesitamos

- Proyecciones: transformar objetos 3D en proyecciones en plano 2D
- Volumen de la vista
- Plano de proyección (viewport en el dispositivo)

Conceptualmente

→ Recorte (clipping) Contra volumen de la vista → Proyección a plano de proyección → Transformación a coordenadas del Dispositivo →

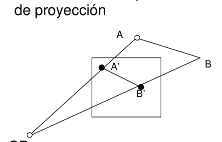
Proyecciones Geométricas Planas

Conceptos: proyectores rectos, centro de proyección, plano de proyección

Proyecciones

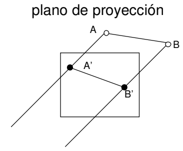
Perspectiva
Centro de proyección a distancia finita del plano de proyección

Paralela
Centro de proyección a distancia infinita del plano de proyección



CP

(proyectores convergen)



CP en el infinito
(proyectores paralelos)

Perspectiva

- En la proyección, el tamaño del objeto varía inversamente con la distancia del objeto al centro de proyección.
- Objetos parecen más realistas
- No es útil par almacenar forma y medidas exactas de los objetos. Las líneas paralelas en general no se mantienen paralelas.
- Proyecciones de líneas paralelas que no son paralelas al plano de proyección convergen en un punto de anulación (vanishing point)