

AS31B: Astrofísica de \star s - Tarea 3

Inicio: Jueves 02 de Septiembre 2004, 10:15

Entrega: Jueves 23 de Septiembre 2004, 11:45

CLASIFICACIÓN ESPECTRAL, ATMÓSFERAS ESTELARES, ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA, DIAGRAMA H-R

1. Aplicación de las leyes de Boltzmann & Saha.

- (a) Para el átomo de H ionizado, calcule la temperatura a la cual el 50% de los átomos están ionizados,
- (b) Repita a) para 1% y 99%. Calcule entonces el rango de temperaturas en el cual el H se ioniza entre un 1% y un 99% en un gas en equilibrio termodinámico,
- (c) Comparar los valores de b) con las temperaturas para la cuales entre un 1% y un 99% de los átomos de H neutro tiene sus electrones en el nivel excitado $n=2$, que dan origen a las líneas de Balmer (visto en Clases).
- (d) Resuelva el problema 8.9 del Texto.
- (e) Resuelva el problema 8.10 del Texto.

2. Aspectos de las leyes de Boltzmann & Saha.

- (a) Partiendo de la ecuación de Boltzmann para un átomo en un estado de ionización dado, y de la definición de función de partición vista en clases, demuestre que:

$$\frac{n_i}{n} = \frac{g_i}{Z} \exp^{-E_i/kT_{ex}} \quad (1)$$

done T_{ex} es la temperatura de excitación del gas, n_i es la densidad de partículas con sus electrones en el nivel de excitación i , n es la densidad total de partículas en ese mismo estado de ionización, y E_i se mide c/r al nivel fundamental.

- (b) Partiendo de lo anterior, demuestre la 'expresión logarítmica' de la ecuación de Boltzmann:

$$\log \frac{n_i}{n} = \log \frac{g_i}{Z} - \frac{5040}{T_{ex}} E_i \quad (2)$$

donde E_i está en eV y T_{ex} en K. Esto muestra claramente que para $T_{ex} \rightarrow 0$, entonces $n_i \rightarrow 0$ para todo $i \neq 1$, es decir todos los átomos y iones están en el nivel fundamental.

- (c) Partiendo de la expresión vista en clases para el ecuación de Saha, demuestre que su 'expresión logarítmica' está dada por:

$$\log \frac{n_{j+1}}{n_j} = \log \frac{2Z_{j+1}}{Z_j} + \frac{5}{2} \log T - \log P_e - \frac{5040}{T_{ion}} \chi_i - 0.48 \quad (3)$$

- (d) Diferenciando la expresión anterior, demuestre que la razón $\delta(n_{j+1}/n_j)/(n_{j+1}/n_j)$ indica que:

- Cuando P_e aumenta, disminuye la ionización,
- Cuando T_{ex} aumenta, aumenta la ionización,
- El efecto de una pequeña variación en T es mayor que el efecto de una pequeña variación de P_e ,
- El aumento de ionización al variar T_{ion} depende de T_{ion} y de χ_i , pero es mayor a menores temperaturas.

- (e) Muestre que la función de partición, Z, definida en clases, y que involucra una sumatoria sobre todos los niveles de energía es en general, divergente para el átomo de H neutro.

- (f) En general, si la distancia media entre dos átomos es menor que el radio orbital, no pueden haber estados ligados en esa órbita. Con esto, y por lo visto en e), la sumatoria de la función de partición se detiene en aquel valor de n en el cual el orbital está tan lejos del núcleo ($r_n = a_o n^2 / Z$, donde a_o es el radio de Bohr, y Z es el número atómico, **NO es la función de partición definida arriba**) que comienza a colisionar con otros átomos. Demuestre que el valor de corte de n está dado por:

$$n_{max} = \sqrt{\frac{Z < d >}{2 a_o}} \quad (4)$$

donde $< d > = (3/4\pi N)^{1/3}$ es la distancia promedio entre átomos con densidad numérica N.

- (g) Calcule $< d >$ y n_{max} para el H (número atómico = 1) para $N_H = 1.5 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ (como en la atmósfera solar, ver apuntes de clases),
- (h) Haga lo mismo que en g) para el centro del Sol, donde $N_H \sim 10^{26} \text{ cm}^{-3}$. ¿Qué ocurre en éste caso?

3. Diagrama H-R.

- (a) A partir de las Tablas del Apéndice E del texto, haga una tabla resumen con los rangos de T_e , L/L_\odot , R/R_\odot y M/M_\odot para estrellas de clase de luminosidad Iab (supergigantes), III (gigantes) y V (secuencia principal),
- (b) Para estrellas de secuencia principal, haga un gráfico de $\log(L/L_\odot)$ (eje Y, ordenada, con la mayor luminosidad hacia arriba) vs. $\log T_{eff}$ (eje X, abscisa, con la menor temperatura hacia la derecha), e incluya en cada punto del gráfico el valor de la masa de la estrella correspondiente, en términos de M/M_\odot ,

- (c) Para estrellas de secuencia principal, haga un gráfico de $\log(L/L_\odot)$ (eje Y, ordenada) *vs.* $\log(M/M_\odot)$ (eje X, abscisa), y demuestre que existe una relación **Masa-Luminosidad** bien definida para estos objetos. En este mismo gráfico, incluya la relación entre $\log(R/R_\odot)$ y $\log(M/M_\odot)$.

4. Ecuación de transferencia.

- (a) La opacidad media de Rosseland se define por:

$$\kappa\rho = \frac{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu\rho} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} \quad (5)$$

donde κ_ν es la opacidad a frecuencia ν , y B_ν es la función de Planck.

En el caso de absorción libre-libre, en la que un fotón es absorbido por un electrón libre en el campo Coulombiano de un átomo, el coeficiente $\kappa_\nu\rho$ para el H puro está dado por:

$$\kappa_\nu\rho = 1.32 \times 10^{56} \frac{\rho^2 g_{ff}}{\nu^3 T^{1/2}} (1 - e^{-h\nu/kT}) \text{ cm}^{-1} \quad (6)$$

donde g_{ff} es una corrección cuántica del cálculo clásico llamado *factor de Gaunt*, que para efectos de este problema puede considerarse constante.

Introduciendo la variable $x = h\nu/kT$, escriba la expresión para $\frac{1}{\kappa_\nu\rho} \frac{\partial B_\nu}{\partial T}$ y grafíquela como función de x para x entre 0 y 20. Use este gráfico para mostrar que el promedio de Rosseland está determinado fundamentalmente por κ_ν cuando ν es unas pocas veces kT/h ,

- (b) Muestre que el promedio de Rosseland satisface la *ley de Kramer*, es decir que:

$$\kappa \propto \rho T^{-3/5} \quad (7)$$

y evalúe la constante de proporcionalidad.

- (c) Resuelva el problema 9.16 del Texto.
 (d) Resuelva el problema 9.24 del Texto.