

Guia ejercicios control 1 2004

1. Sean A y B matrices cuadradas de orden k y B no singular. Muestre que A y BAB^{-1} tienen los mismos valores propios.
2. Sea la partición de una matriz A cuadrada de orden n :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

- a) Muestre que si $|A_{22}| \neq 0$, $|A| = |A_{22}||A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|$.
 - b) Si a es un vector de \mathbb{R}^n y A no singular, muestre que $|A + aa^t| = (1 + a^t A^{-1}a)|A|$.
 - c) Sea $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}$ con $\text{rango}(A_1) = \text{rango}(A)$ y $B = I - A_1(A_1^t A_1)^{-1}A_1^t$. Muestre que $C = A_2^t B A_2$ es no singular.
3. Muestre que $B^- A^-$ es g-inversa de AB si y solo si $A^- A B B^-$ es idempotente.
 4. Sea el modelo $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ y se supone que los x_i deben pertenecer al intervalo $[-10, 15]$.
 - a) Elige los x_i de manera que $\text{Var}(\hat{\beta}_0)$ sea mínimo.
 - b) Elige los x_i de manera que $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$ sea mínimo.
 - c) Repite a) y b) con la restricción que los x_i pertenecen al intervalo $[-10, 10]$.
 5. Sea el modelo $y = \beta + \epsilon$, $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \Gamma)$, donde Γ es invertible. Sea $z = By$ y $\eta = B\epsilon$ donde $B = \Gamma^{-1/2}$.
 - a) Muestre que el modelo puede escribirse como $z = B\beta + \eta$ con $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$.
 - b) De el estimador de los mínimos cuadrados de β .
 - c) De el estimador de los mínimos cuadrados de β bajo la restricción $C^t \beta = 0$ donde C es una matriz a q filas y n columnas y es de rango q .
 6. Sea el modelo $y = \beta + \epsilon$, donde

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Se supone que $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$. Obtenga, si es posible, el BLUE de

(i) $\beta_1 + \beta_3$

(ii) β_2 ,

Calcule sus varianzas.