MA34B Sección 01 - Auxiliar extra

15 de Abril 2004

Profesor: Rodrigo Abt
Auxiliar: Ismael Vergara

P1) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a.s. de X con:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

a) Pruebe que $T = \text{mín}\{X_i\}$ es suficiente para θ.

b) Encuentre el EMV $\hat{\theta}$ de θ. Calcule su esperanza y varianza.

c) Encuentre el estimador de momentos θ_{MOM} de θ y compárelo con el de máxima verosimilitud. ¿Cuál es mejor?

Solución:

a) Del teorema de factorización es directo:

$$f_n(x|\theta) = e^{-\sum x_i} \cdot e^{n\theta} \cdot I_{\{\text{mín}\{X_i\} \geq \theta\}}$$

De donde $g(T, \theta) = e^{n\theta} \cdot I_{\{\text{mín}\{X_i\} \geq \theta\}}$ y $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{-\sum x_i}$.

b)

$$f_n(x|\theta) = \begin{cases} e^{-\sum x_i + n\theta} & \text{si } \text{mín}\{x_i\} \geq \theta \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Esta es una función creciente con θ, luego el mayor de este que cumple con las restricciones es:

$$\hat{\theta} = \text{mín}\{X_i\}$$

Veamos esperanza y varianza. Si $W = \text{mín}\{X_i\}$, la F.d.a. de W es

$$G(w) = 1 - (1 - F(w))^n \Rightarrow g(w) = ne^{-n(w-\theta)} \quad \text{si } w \geq \theta$$

De donde se puede obtener (por integración por ejemplo) que

$$E(\hat{\theta}) = E(W) = \frac{1}{n} + \theta$$

$$Var(\hat{\theta}) = Var(W) = \frac{1}{n^2}$$

El estimador es *asintóticamente* insesgado y su varianza tiende a 0 cuando $n \to \infty$, luego es consistente.

c) El estimador de momentos se obtiene igualando el momento teórico de orden 1 con su correspondiente muestral:

$$\mu_1 = E(X^1) = \theta + 1 = m_1 = \bar{X} \Rightarrow \theta_{MOM} = \bar{X} - 1$$

Veamos esperanza y varianza: $E(\theta_{MOM}) = E(\bar{X}) - 1 = E(X) - 1 = \theta + 1 - 1 = \theta$, por lo que es insesgado. La varianza es $Var(\theta_{MOM}) = Var(\bar{X}) = 1/n$ que tiende a 0 cuando $n \to \infty$, por lo que el estimador de momentos es consistente también.

Para comparar los estimadores usamos el criterio del Error Cuadrático Medio. Veamos para cada caso:

$$ECM(\theta_{MOM}, \theta) = \text{Sesgo}^2 + Var(\theta_{MOM}) = \frac{1}{n}$$

$$ECM(\hat{\theta}, \theta) = \text{Sesgo}^2 + Var(\hat{\theta}) = \frac{2}{n^2}$$

NOTA: Recordar que Sesgo=(parámetro-E(estimador)).

Finalmente se puede observar que $ECM(\hat{\theta}, \theta) < ECM(\theta_{MOM}, \theta)$ para $n \geq 1$, por lo que $\hat{\theta}$ es mejor que θ_{MOM}.

P2) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a.s. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (μ y σ^2 desconocidos). Además suponga que $\bar{X} = 10$,$n = 25$ y $S_n^2 = 12,37$.

a) Encuentre un intervalo de confianza para μ al 95 % de confianza.

b) Encuentre un intervalo de confianza para σ^2 al 95 % de confianza.

Solución:

a) Se necesita encontrar $a = a(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ y $b = b(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tales que

$$\Pr(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha \tag{1}$$

Para resolver lo anterior necesitamos encontrar un estadístico que sea función de μ pero cuya distribución NO dependa de μ, es decir, un pivote. Una alternativa para encontrar pivotes es examinar el EMV de μ, el cual es $\hat{\mu} = \bar{X}$. Notemos que por transformación lineal $\bar{X}$ sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2/n)$, luego

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Sin embargo, este estadístico NO sirve como pivote ya que depende del parámetro σ^2 que es desconocido. Sin embargo se sabe que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \\[2em] \dfrac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\frac{nS_n^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S_n/\sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}$$

Luego haciendo transformaciones algebraicas a (1) tenemos que:

$$\begin{aligned} \Pr\left[\frac{\bar{X} - b}{S_n/\sqrt{n-1}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S_n/\sqrt{n-1}} \leq \frac{\bar{X} - a}{S_n/\sqrt{n-1}}\right] &= 0{,}95 \\ \Pr(L \leq t \leq U) &= 0{,}95 \\ \Leftrightarrow \Pr(t \geq U) &= 0{,}025 \end{aligned}$$

Usando las tablas, encontramos que $U = 2{,}06$, de donde:

$$\frac{\bar{X} - a}{S_n/\sqrt{n-1}} = 2{,}06 \Rightarrow a = \bar{X} - 2{,}06 \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n-1}} = 9{,}282075$$

$$\frac{\bar{X} - b}{S_n/\sqrt{n-1}} = -2{,}06 \Rightarrow a = \bar{X} + 2{,}06 \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n-1}} = 10{,}71793$$

De donde $\mathrm{IC}_\mu = [9{,}282075; 10{,}71793]$.

b) Al igual que en el caso anterior, se plantea:

$$\Pr(a \leq \sigma^2 \leq b) = 1 - \alpha \tag{2}$$

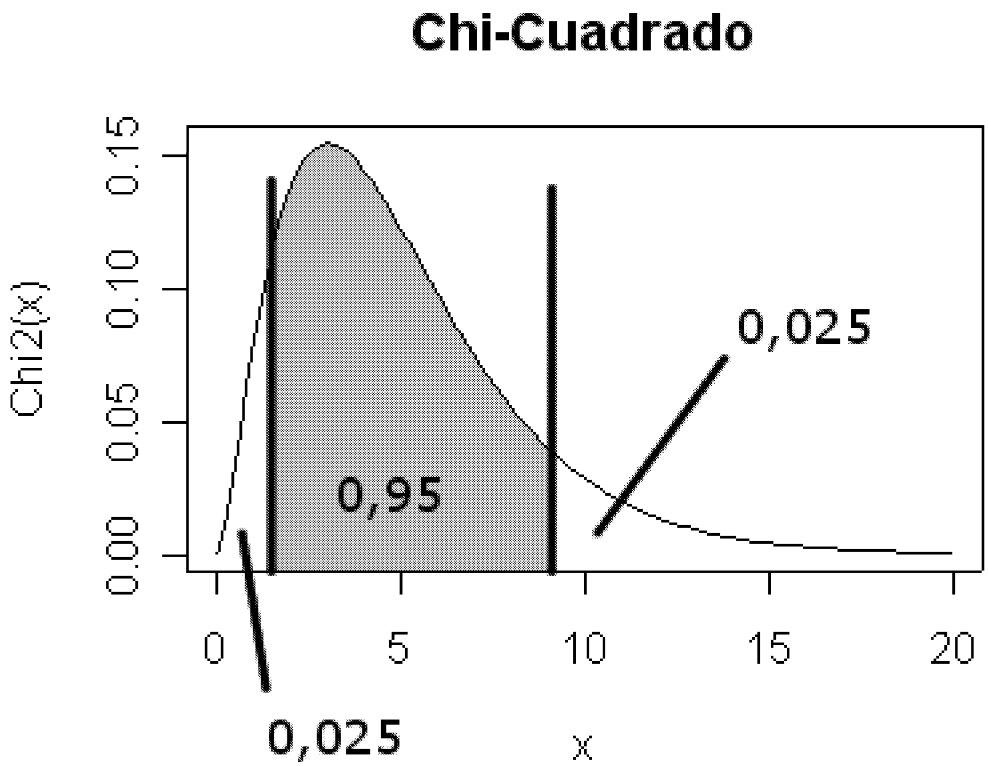
Para buscar un pivote, la mejor opción es usar el estadístico:

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

De donde al hacer transformaciones algebraicas a (2) podemos obtener:

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\frac{nS_n^2}{b} \leq \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \leq \frac{nS_n^2}{a}\right] &= 0{,}95 \\
\Pr(L \leq \chi^2_{n-1} \leq U) &= 0{,}95
\end{aligned}$$

Notemos en este caso que la distribución χ^2_{n-1} no es simétrica, por lo que no es válido hacer $L = -U$. Lo que se hace entonces es asignar $0,025$ de acuerdo al gráfico:



Entonces se resuelve:

$$\Pr(\chi^2_{n-1} \geq L) = 0,975 \Rightarrow L = 13,12$$

$$\Pr(\chi^2_{n-1} \geq U) = 0,025 \Rightarrow L = 40,6$$

De donde, se obtiene que

$$a = \frac{nS_n^2}{U} = 7{,}62$$

$$b = \frac{nS_n^2}{L} = 23{,}57$$

Luego el intervalo de confianza es $\mathrm{IC}_{\sigma^2} = [7{,}62; 23{,}57]$.

SUERTE. El Profesor.