MA34B Sección 01 - Guía de Ejercicios Control 1

16 de Abril 2004

Profesor: Rodrigo Abt
Auxiliar: Ismael Vergara

P1) Se desea estudiar la aparición de caras(C) y sellos(S) en pares de lanzamientos de una moneda. Sea Z la variable aleatoria que indica la cantidad de veces que aparece cara en el par de lanzamientos. Se sabe que en una muestra aleatoria simple de n tiradas se encontraron a casos de la combinación (C,C),b casos de la combinación (C,S) y c casos de la combinación (S,S). Se sabe que la frecuencia de aparición de caras en UN lanzamiento es $\theta/(1+\theta)$ con θ desconocido. Suponga que todos los lanzamientos de la moneda son independientes.

a) Encuentre la distribución de Z.
b) Muestre que la función de verosimilitud es proporcional a

$$\frac{\theta^{2a+b}}{(1+\theta)^{2a+2b+2c}}$$

c) Muestre que el EMV $\hat{\theta}$ de θ es

$$\frac{2a+b}{b+2c}$$

d) Encuentre el estimador de momentos de θ

Solución:

a) La ley de Z quedará determinada al conocer las probabilidades de cada valor que tome la variable, luego, como $Z = 0, 1, 2$ se tiene

$$\Pr(Z = 2) = \Pr(\text{L1=C,L2=C}) = \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{\theta}{1+\theta}$$

$$\Pr(Z = 1) = \Pr(\text{L1=C,L2=S} \vee \text{L1=S,L2=C}) = 2 \cdot \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{1}{1+\theta}$$

$$\Pr(Z = 0) = \Pr(\text{L1=S,L2=S}) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{1}{1+\theta}$$

Siendo $L1$ y $L2$ los resultados del primer y segundo lanzamiento respectivamente. Una manera alternativa es haber reconocido que la variable Z sigue en realidad una distribución Binomial:

$$P(z|\theta) = \binom{2}{z} \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^z \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{2-z}$$

b) La función de verosimilitud es:

$$P_n(z_1, z_2, \ldots, z_n|\theta) = \prod_{i=1}^{a} P(z_i|\theta) \prod_{i=1}^{b} P(z_i|\theta) \prod_{i=1}^{c} P(z_i|\theta) =$$

$$\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{2a} \left(\frac{2\theta}{(1+\theta)^2}\right)^{b} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{2c} = \frac{2^b \theta^{2a+b}}{(1+\theta)^{2a+2b+2c}} \propto \frac{\theta^{2a+b}}{(1+\theta)^{2a+2b+2c}}$$

c) Sea $L = \ln P_n = b \ln 2 + (2a + b) \ln \theta - (2a + 2b + 2c) \ln(1 + \theta)$, luego

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{2a+b}{\theta} - \frac{2a+2b+2c}{1+\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2a+b}{b+2c}$$

d)

$$\mu_1 = E(Z) = 0 \cdot \Pr(Z = 0) + 1 \cdot \Pr(Z = 1) + 2 \cdot \Pr(Z = 2) = \frac{2\theta}{1+\theta} = m_1 = \bar{Z}$$

De donde

$$\theta_{MOM} = \bar{Z}/(2 - \bar{Z})$$

P2) En n repeticiones independientes de un experimento con probabilidad θ de éxito, ocurren X éxitos. Muestre que

$$\frac{X(X-1)}{n(n-1)}$$

es un estimador insesgado de θ^2, y entonces $\dfrac{X^2}{n^2}$ es sesgado.

Solución:

El número de éxitos en n experimentos de Bernoulli sigue una distribución binomial, luego $X \sim Bin(n, \theta)$. Calculemos entonces la esperanza del estimador:

$$E\left[\frac{X(X-1)}{n(n-1)}\right] = \frac{1}{n(n-1)}E[X^2 - X] = \frac{1}{n(n-1)}[E(X^2) - E(X)]$$

$$= \frac{1}{n(n-1)}[Var(X)+E^2(X)-E(X)] = \frac{1}{n(n-1)}[n\theta(1-\theta)+(n\theta)^2-n\theta] = \theta^2$$

Luego el estimador es insesgado.

Veamos ahora que $\dfrac{X^2}{n^2}$ es sesgado

$$E\left[\frac{X^2}{n}\right] = \frac{1}{n}E[X^2] = \frac{1}{n}[Var(X) + E^2(X)] = \theta^2(n-1) + \theta$$

P3) Para las próximas elecciones municipales, un alcalde debe decidir si postular o no a su reelección. Sea p la proporción de votantes qu votaría por él. Suponga que el alcalde contrata a un consultor para que estime p a partir de los resultados de una encuesta. El consultor obtiene que z personas de n encuestadas votaría por el alcalde. Suponga que por elecciones anteriores el alcalde cree que el parámetro p se distribuye a priori según una distribución $Beta(1, 2)$.

a) Encuentre el estimador de Bayes p_B para p bajo pérdida cuadrática.

Hint:

$$\int_0^1 y^n(1-y)^m dy = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

b) Calcule $E(p_B)$ y $Var(p_B)$. ¿Es insesgado? ¿Es consistente?

Solución:

a) Para este problema se puede definir la v.a. X tal que

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si vota por el alcalde} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Luego X es una Bernoulli de parámetro p, luego la función de verosimilitud es

$$f_n(x|p) = p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i} = p^z(1-p)^{n-z}$$

Por otro lado sabemos que $p \sim Beta(1,2)$, esto es

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)\cdot\Gamma(2)} p^{1-1}(1-p)^{2-1} = 2(1-p)$$

Se tiene entonces

$$\xi(p|x) \propto f_n(x|p)\pi(p) \propto p^z(1-p)^{n-z}\cdot(1-p) = p^z(1-p)^{n-z+1}$$

Reconociendo términos, se ve que $\xi(p|x)$ es una $Beta(z+1, n-z+2)$. Bajo pérdida cuadrática la esperanza de una distribución $Beta(\alpha,\beta)$ es $\alpha/(\alpha+\beta)$, por lo que el estimador de Bayes es:

$$p_B = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{z+1}{n+3}$$

b) Calculando la esperanza y varianza

$$E(p_B) = E\left(\frac{z+1}{n+3}\right) = \frac{1}{n+3}[E(Z)+1] = \frac{np+1}{n+3}$$

$$Var(p_B) = Var\left(\frac{z+1}{n+3}\right) = \frac{1}{(n+3)^2}[Var(Z)] = \frac{np(1-p)}{(n+3)^2}$$

Este estimador es consistente a que $E(p_B) \to p$ y $Var(p_B) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Luego, p_B es consistente.

P4) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a.s. de una v.a. $X \sim U[0, \theta]$. Muestre que la distribución de $T = \text{Máx}\{X_i\}/\theta$ NO depende de θ y en base a PLANTEE la estrategia para construir un intervalo de confianza EXACTO para θ al 95 %.

Solución:

Sea $Y = \text{Máx}\{X_i\}$, luego $T = Y/\theta$ y

$$G(t) = \Pr(T \leq t) = \Pr(Y/\theta \leq t) = \Pr(Y \leq t\theta) = F(t\theta)^n = \left(\frac{t\theta}{\theta}\right)^n = t^n$$

De donde $g(t) = nt^{n-1} \Rightarrow T$ no depende de θ.

Se plantea el intervalo de confianza como

$$\Pr(a \leq \theta \leq b) = 1 - \alpha$$

$$\begin{aligned}
\Pr(a \leq \theta \leq b) &= \Pr(1/b \leq 1/\theta \leq 1/a) \\
&= \Pr(\text{Máx}\{X_i\}/b \leq \text{Máx}\{X_i\}/\theta \leq \text{Máx}\{X_i\}/a) \\
&= \Pr(t_1 \leq T \leq t_2) \\
&= G(t_2) - G(t_1) \\
&= t_2^n - t_1^n = 1 - \alpha
\end{aligned}$$

Para tener el largo del intervalo $L = t_2 - t_1$ más pequeño hay que minimizar L sujeto a la restricción anterior, y encontrar los valores de t_1 y t_2.

P5) (Propuesto) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a.s. de una v.a. $X \sim exp(\lambda)$.

a) Encuentre el EMV para λ.

Solución: $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$

b) Encuentre la distribución de $\lambda\bar{X}$. Calcule su esperanza y varianza. Hint: $T = \sum X_i \sim Gamma(n, \lambda)$.

Solución: $\lambda\bar{X} \sim \Gamma(n, n)$

c) Suponga $n = 10$ y $\bar{X} = 5$. Encuentre un intervalo de confianza EXACTO para λ al nivel 90 %.

Hint: Si $F_{a,b}^{-1}(\alpha)$ es la función que devuelve el cuantil asociado a la probabilidad α, se presentan a continuación algunos valores de esta función:

$F_{10,5}^{-1}(0{,}95)$	$=$	78.52608
$F_{10,5}^{-1}(0{,}05)$	$=$	27,12703
$F_{5,10}^{-1}(0{,}95)$	$=$	91,53519
$F_{5,10}^{-1}(0{,}05)$	$=$	19,70150
$F_{10,10}^{-1}(0{,}95)$	$=$	157,0522
$F_{10,10}^{-1}(0{,}05)$	$=$	54,25406

Solución:

$$\text{IC}_\lambda = \left[\frac{F_{10,10}^{-1}(0{,}05)}{\bar{X}}; \frac{F_{10,10}^{-1}(0{,}95)}{\bar{X}}\right] = [10{,}85081; 31{,}41044]$$