MA34B Sección 01

Prof. Rodrigo Abt

23 de Marzo 2004

Prueba de Teorema Central Del Límite (versión simple)

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a.s. de una v.a. X, con media μ y varianza σ^2. Sea:

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)$$

Mostraremos que Z_n converge[1] a una distribución normal estandarizada cuando $n \to \infty$.

Escribamos:

$$Z = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} W_i$$

Donde $W_i = \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)$.

De lo anterior se tiene que $E[W_i] = 0$ y $Var[W_i] = 1$.

Si $\varphi_W(t)$ es la f.g.m. de W_i, entonces podemos escribir la f.g.m. de Z en función de esta última:

$$\varphi_Z(t) = \left[\varphi_W\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

[1]En distribución

Si expandimos la expresión de la derecha de acuerdo a una serie de Taylor en torno al 0, tenemos:

$$\varphi_Z(t) = \left[\varphi_W(0) + \varphi_W^{'}(0)\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\varphi_W^{''}(0)\frac{t^2}{n} + \dots\right]^n = \left[1 + 0 \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + \dots\right]^n$$

Nótese que lo anterior se puede escribir como:

$$\varphi_Z(t) = \exp\left(n \log\left[1 + 0 \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + \dots\right]\right)$$

Si nuevamente hacemos una expansión de Taylor para el logaritmo, de la forma $\log(1 + a)$, se tiene que:

$$\varphi_Z(t) = \exp\left(n\left[\frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + \dots\right]\right) \approx \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

...que resulta ser la f.g.m. de una distribución normal estandarizada.

FIN