

PROFESOR: LUIS BRUNA

AUXILIARES: ALEXIS FUENTES, JOSÉ LUIS GONZÁLEZ

P1.- Sea X_0 una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Sea Y el punto de intersección de la curva $f(x) = a(x - X_0)^2$ con el eje de las ordenadas, donde $a > 0$ es un punto fijo.

- (i) Calcule la distribución de la variable aleatoria Y .
- (ii) Calcule la densidad de Y .
- (iii) Sea α una variable aleatoria discreta con soporte $\{-1, 1\}$ y $\mathbb{P}(\alpha = -1) = \mathbb{P}(\alpha = 1) = 1/2$, independiente de X_0 . Sea Y_α el punto de intersección de la curva $f_\alpha(x) = \alpha a(x - X_0)^2$ con el eje de las ordenadas. Calcule la distribución de Y_α .

P2.- Sea $a \in \mathbb{R}$ y

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^n (Y - i) + a & aY \\ 1 & Y \end{pmatrix}$$

Calcular la Probabilidad de que \mathbf{A} sea invertible sabiendo que Y es una variable geométrica de parámetro p . Calcule la misma probabilidad asumiendo que Y es una variable aleatoria absolutamente continua.

P3.- El tiempo de funcionamiento de un aparato de radio es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda = 1/8$. Si usted compra esta radio usada por 15 años. ¿Cuál es la probabilidad de que esté aún funcionando en 8 años más?.

P4.- Si Y es una variable Uniforme(0,5). Calcule la probabilidad de que las raíces de la ecuación $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ sean reales.

P5.- Sea $a > 0$. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes distribuidas de acuerdo a una Uniforme(0, a). Sea $Y_1 = \min\{X_1, X_2\}$ e $Y_2 = \max\{X_1, X_2\}$. Calcule la probabilidad que con tres segmentos de largo $Y_1, Y_2 - Y_1$ y $a - Y_2$ se pueda construir un triángulo. (Recuerde que con 3 segmentos de largo L_1, L_2 y L_3 se puede construir un triángulo si y sólo si, $L_1 \leq L_2 + L_3, L_2 \leq L_1 + L_3, L_3 \leq L_1 + L_2$).

P6.- Dos amigos X e Y quedaron de almorzar juntos a las 12:30. Se sabe que el tiempo de llegada de ambos es una distribución uniforme entre las 12:15 y las 13:00, y que además son independientes.

El tiempo que el primero en llegar está dispuesto a esperar al segundo es t minutos.

- (i) Calcule la distribución de T , definido como el tiempo que espera el primero en llegar.
- (ii) Calcule la probabilidad de que se junten a almorzar.

P7.- El tiempo de duración de una ampolleta puede modelarse en general como una variable aleatoria T con distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$.

En una habitación hay una lámpara con 4 ampolletas, cada una con un tiempo esperado de duración de 12 días y que funcionan independientemente.

Se define I como la variable aleatoria que representa el tiempo que la pieza permanece iluminada, es decir, el tiempo que transcurre hasta que las 4 ampolletas se queman. Calcule $\mathbb{E}(I)$.

P8.- Se escoge un ángulo θ al azar en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y se traza una línea en el plano pasando por el punto $(0,1)$ y formando un ángulo θ con el eje de las ordenadas. Sea X el punto de intersección de la línea con el eje de las abscisas. Determine la distribución y la densidad de X , si es que existe.

P9.- Sean X, Y variables aleatorias independientes. Se definen $U = \min(X, Y)$ y $V = \max(X, Y)$.

- (i) Probar que $F_U(u) = 1 - (1 - F_X(u)) \cdot (1 - F_Y(u))$ y que $F_V(v) = F_X(v) \cdot F_Y(v)$.
- (ii) Suponga que X e Y son exponenciales de parámetro $\lambda = 1$, probar que U es una exponencial de parámetro $\alpha = 2$.
- (iii) Suponga que X e Y son exponenciales de parámetro $\lambda = 1$, probar que V tiene la misma distribución que $X + \frac{1}{2}Y$.