# Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile
## MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
# Guía 4

Semestre 2004-1. Prof.: L. Baffico - Aux: A. de Laire.

### Ejercicios

1. Para el sistema de ecuaciones no-lineal:

$$\begin{aligned} x' &= y(1+x-y^2) \\ y' &= x(1+y-x^2) \end{aligned}$$

**(i)** Calcule los puntos críticos del sistema y diga si el sistema es casi-lineal en dichos puntos (i.e., la matriz jacobiana del sistema es invertible en dichos puntos y son aislados).

**(ii)** Haga un desarrollo lineal y analice el diagrama de fases en los puntos críticos donde el sistema es casi-lineal.

2. Para el punto crítico $(0,0)$ de cada uno de los siguientes sistemas autónomos lineales, determine si **(i)** es o no aislado. En caso de ser aislado determine **(ii)** su naturaleza (nodo, pto. silla, pto. espiral, etc.) y **(iii)** sus propiedades de estabilidad (estabilidad, estabilidad asintótica, inestabilidad). Cuando corresponda dé la dirección de las rectas tangentes o asíntotas que aparezcan y esboce un diagrama de fases.

$$(a)\begin{cases} x' = & -x-2y \\ y' = & 4x-5y \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x' = & 4x-3y \\ y' = & 8x-6y \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} x' = & -3x+4y \\ y' = & -2x+3y \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} x' = & -4x-y \\ y' = & x-2y \end{cases} \qquad (e)\begin{cases} x' = & 5x+2y \\ y' = & -17x-5y \end{cases} \qquad (f)\begin{cases} x' = & 4x-2y \\ y' = & 5x+2y \end{cases}$$

Soln: (a) pto. espiral a. estable, (b) pto. crítico no aislado, (c) pto. silla inestable, (d) nodo a. estable, (e) centro estable pero no a. estable, (f) pto. espiral inestable.

3. Considere las vibraciones de una masa sujeta a un resorte:

$$x'' + 2bx' + a^2x = 0,$$

donde $a > 0$ y $b \geq 0$ son constantes que representan el roce y la rigidez del resorte, respectivamente.

**(i)** Definiendo $y = x'$, reescriba la ecuación como un sistema de primer orden en las variables $x$ e $y$. Pruebe que su único punto crítico es $(0,0)$ y que es aislado.

**(ii)** Hallar los valores propios asociados a este sistema.

**(iii)** En los cuatro casos:

$$1)\ b = 0\ ,\quad 2)\ 0 < b < a\ ,\quad 3)\ b = a\ ,\quad 4)\ b > a,$$

describa la naturaleza y las propiedades de estabilidad del punto crítico $(0,0)$. Dé una interpretación física del movimiento de la masa en cada caso.

Soln: 1) centro estable pero no a. estable, mov. periódico, 2) pto. espiral a. estable, mov. oscilatorio amortiguado, 3) nodo a. estable, mov. amortiguado sin oscilaciones, 4) ídem que 3).

**Problemas de Control:**

1. Considere el siguiente modelo en que $x$ e $y$ representan las poblaciones de dos especies en competencia:

$$x' = 60x - 4x^2 - 3xy$$
$$y' = 42y - 2y^2 - 3xy$$

**(i)** Demuestre que los puntos críticos del sistema son $C_1 = (0,0), C_2 = (0,21), C_3 = (15,0), C_4 = (6,12)$. Determine las linealizaciones del sistema en torno a sus puntos críticos y pruebe que el sistema es casi-lineal en torno a sus puntos críticos.

**(ii)** Determine el tipo y estabilidad de los puntos críticos a partir de las características de los sistemas linealizados.

**(iii)** Esboce una aproximación del diagrama de fases del sistema cerca de los puntos críticos indicando claramente la dirección del tiempo y aproximadamente la dirección de las rectas tangentes y/o asíntotas.

**(iv)** Esboce el diagrama de fases global para $x \geq 0$ e $y \geq 0$.A partir de éste justifique la profecía siguiente:*inexorablemente una de las especies está condenada a la extinción.*

2. Para el sistema de ecuaciones:

$$x' = y + x^3 + xy^2$$
$$y' = -x + x^2y + y^3$$

se tiene que (0,0) corresponde a un punto crítico; mediante un paso a coordenadas polares, estudie dicha singularidad.

**Ind.:** recuerde que en coordenadas polares $x(t) = r(t)\cos(\theta(t)), y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$,ie., tanto el ángulo como el radio son variables en el tiempo.

3. Dibuje las trayectorias de los siguientes sistemas, indicando las direcciones (flechas) en las cuales éstas son recorridas. Sea riguroso.

$$\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = 3x + 4y.$$

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = x + y.$$

4. Encuentre todos los puntos singulares de los sistemas

$$\dot{x} = -y + xy, \quad \dot{y} = -x + y + xy - 1$$

$$\dot{x} = \sin x + \sin y, \quad \dot{y} = -x + y$$

y determine el carácter de cada uno de ellos (estabilidad y tipo de punto singular).

5. *(Estabilidad).* Considere el sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + f(x), \tag{1}$$

donde $f : R \to R$ es continuamente diferenciable. Denotaremos $F(s) = 2\int_0^s f(\tau)d\tau$.

**(a)** Demuestre que toda solución $(x(t), y(t))$ de (1) satisface que para alguna constante $C > 0$,

$$x(t)^2 + y(t)^2 = C + F(x(t)) \quad \forall\, t > 0. \tag{2}$$

(derive $x^2 + y^2 - F(x)$).

Supondremos en lo que sigue que $f(0) = 0$, y que para cierto $\rho > 0$, y todo $s$ tal que $|s| \leq \rho$, se tiene

$$|F(s)| \leq \frac{1}{2}s^2. \tag{3}$$

**(b)** Se le propone en esta parte demostrar que el punto singular de (1), $(0,0)$, es *estable.*

Para ello, considere cualquier número $\varepsilon$ con $0 < \sqrt{\varepsilon}$ una solución de (1) tal que $x(0)^2 + y(0)^2 < \frac{\varepsilon}{4}$. Usando el esquema a continuación, muestre que

$$x(t)^2 + y(t)^2 < \varepsilon \quad \text{para todo } t > 0. \tag{4}$$

(i) Muestre que el número $C$ en (2) para esta solución satisface que $C < 3\varepsilon/8$.

(ii) Suponga, por contradicción, que en un cierto $t_0 > 0$ la solución satisface que $x(t_0)^2 + y(t_0)^2 = \varepsilon$. Usando (i), (2) y (3), concluya que esto es imposible, por ende que (4) se cumple y que $(0,0)$ es estable.

**(c)** Pruebe que ninguna solución de (1) $(x(t), y(t))$ (excepto (0,0)), satisface que $(x(t), y(t)) \to (0,0)$ si $t \to \infty$, en particular $(0,0)$ no es asintóticamente estable. (Suponga que tal solución existe. Muestre primero que el $C$ correspondiente en (2) debe ser cero. Concluya una contradicción usando (3).

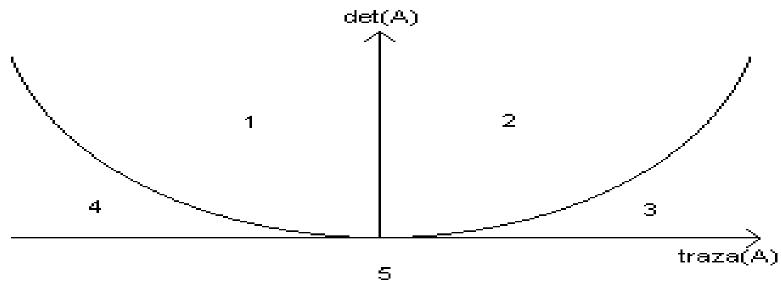
**(d)** Considere la ecuación de segundo orden

$$\ddot{x} + x - x^n = 0,$$

con $n > 1$. Muestre que no hay soluciones no-nulas de esta ecuación que tiendan a cero en $+\infty$.

6. *(Regiones críticas en el plano traza/determinante)*

**(i)** Considere el sistema $X' = AX$ con $A \in I\!R^{2\times 2}$ constante. Sabiendo que el polinomio característico de A es $p(\lambda) = \lambda^2 - traza(A)\lambda + det(A)$ indique a que tipo de punto crítico corresponde cada una de las cinco regiones de la figura:




**(ii)** Considere el sistema $X' = AX$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 10+\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in I\!R, \alpha \neq -10$. Demuestre que el origen es el único punto crítico. Trazando la recta que relaciona el determinante de $A$ con su traza, determine la naturaleza de este punto crítico como función de $\alpha$.

7. Considere el sistema no lineal para $t \geq 0$

$$\begin{cases} x' = & 2xy \\ y' = & y^2 - x^2, \end{cases}$$

Para estudiar su comportamiento en el plano de fases se sugiere lo siguiente.

**(i)** Pruebe usando la regla de la cadena que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

**(ii)** Utilice lo anterior y el cambio de variables $z = y/x$ para demostrar que las trayectorias tienen la forma

$$x^2 + y^2 = k|x|, \ k > 0.$$

**(iii)** Demuestre que las trayectorias tienen simetría con respecto a los ejes. Usando coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ dibuje una trayectoria para $k > 0$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$. ¿En qué puntos intersecta al eje $y$? Esboce a partir de estas informaciones un diagrama de fases aproximado del sistema en los cuatro cuadrantes del plano $xy$.

**(iv)** Dibuje el sentido del tiempo en las trayectorias. Para ello observe el signo de $y'$ si parte de las condiciones iniciales $(k, 0)$ y $(-k, 0)$ en el plano de fases.

8. Considere el siguiente sistema no lineal:

$$(SNL1) \begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2) \\ x(0) = r_0 > 0, \ y(0) = 0 \end{cases}$$

**(i)** Demuestre que el único punto crítico es el $(0,0)$.

**(ii)** Tomando $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y derivando las expresiones $x^2 + y^2 = r^2$, $\theta = \arctan(y/x)$ deduzca que:

$$xx' + yy' = rr', \qquad xy' - x'y = r^2\theta.$$

**(iii)** Multiplicando en $(SNL1)$ la primera ecuación por $x$, la segunda por $y$ y luego la primera por $y$ y la segunda por $x$ y combinando deduzca que:

$$(SNL2)\begin{cases} r' = r(1-r^2) \\ \theta' = 1 \\ r(0) = r_0,\ \theta(0) = 0 \end{cases}$$

Analizando directamente este sistema explique qué ocurre si $r_0 = 1$.

**(iv)** Resuelva y demuestre que:

$$r^2(t) = \frac{1}{1 + k_0 e^{-2t}}, \qquad k_0 = \frac{1 - r_0^2}{r_0^2}, \qquad \theta(t) = t.$$

**(v)** Si $r_0 < 1$ demuestre que $r(t) < 1$, $\forall t \geq 0$ y que $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = 1$. Análogamente pruebe que si $r_0 > 1$ entonces $r(t) > 1$, $\forall t \geq 0$ y que $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = 1$.

**(vi)** Haga un diagrama de fases considerando el análisis de los puntos anteriores.

9. Analice cualitativamente los siguientes sistemas no lineales:

$$(A)\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x - x^3 \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} x' = \sin(x) - \cos(y) \\ y' = x - y \end{cases}$$

Indique en cada caso:

**(i)** Puntos críticos.

**(ii)** Sistemas linealizados en torno a cada punto crítico.

**(iii)** Tipo cualitativo de cada punto crítico.

**(iv)** Tipo de estabilidad.

**(v)** Diagrama de fases aproximado

10. (Ex-2003-1-del Pino) Mediante una descomposición de Jordan encuentre la solución del sistema:

$$\vec{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \vec{\mathbf{x}}$$

11. (Ex-2003-1-del Pino) (a) Resuelva el sistema

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{\mathbf{x}}$$

y grafique en modo preciso sus trayectorias, indicando ejes principales y con flechas la direccion en la cual las trayectorias son recorridas.

(b) Considere el sistema

$$x' = y, \quad y' = x - x^3.$$

Pruebe que toda solución $(x(t), y(t))$ del sistema satisface

$$\frac{1}{2}y^2 = E + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$$

para cierta constante $E$. Identifique puntos de equilibrio del sistema y grafique en modo preciso sus trayectorias, indicando con flechas la direccion en la cual son recorridas.

12. (Ex-2003-1-del Pino) (a) Sea $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}^+$ una función positiva, continuamente diferenciable que satisface la desigualdad

$$f'(t) \leq -\mu f(t) + f(t)^\alpha$$

donde $\mu > 0$ y $\alpha > 1$. Demuestre que si $-\mu f(0) + f(0)^\alpha < 0$ entonces $-\mu f(t) + f(t)^\alpha < 0$ para todo $t > 0$. Concluya que $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe y que es igual a cero.

(b) Considere el sistema $2 \times 2$ de primer orden

$$x_1' = -\lambda_1 x_1 + f_1(x_1, x_2)$$

$$x_2' = -\lambda_2 x_1 + f_2(x_1, x_2)$$

donde $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$. y además $f_1$ y $f_2$ son funciones continuas en $I\!R^2$ que satisfacen

$$|f_1(x_1, x_2)| + |f_1(x_1, x_2)| \leq x_1^2 + x_2^2.$$

Multiplique la primera exuación por $x_1$, la segunda por $x_2$ y ayúdese de la parte (a) para demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $(x_1(t), x_2(t))$ es una solución de este sistema en $[0, \infty)$ con $|x_1(0)| + |x_2(0)| < \delta$, entonces

$$\lim_{t\to+\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (0, 0).$$

Se dice que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio *asintóticamente estable* del sistema.

13. (Ex-2003-1-Osses) Encuentre la solución general de las siguientes EDO:

**(i)** Resuelva $xyy' = y - 1$ con condiciones iniciales $y(e) = e + 1$.

**(ii)** Encuentre la solución general de $y'' + y = \tan x$.

**(iii)** Resuelva $y'' + 2y' + 2y = f(t)$ para $t \geq 0$ donde $f$ es continua por pedazos, con condiciones iniciales $y(0^+) = 0$, $y'(0^+) = 1$.

**(iv)** Se tiene que

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Encuentre nuevas variables $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ que desacoplen el sistema

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 2y \\ y' &= 3x - y. \end{aligned}$$

14. (Ex-2003-1-Osses)

**(i)** Sea $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ una función continua no negativa y $c_0$ una constante real. Suponga que se tiene la siguiente desigualdad para una función continuamente diferenciable $y(t)$:

$$y(t) \leq c_0 + \int_0^t a(s)y(s)\,ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Se pide demostrar que entonces:

$$y(t) \leq c_0\, e^{\int_0^t a(s)\,ds}, \quad \forall t \in [0,T].$$

Para ello defina las funciones auxiliares $z$ y $w$ por

$$z(t) = c_0 + \int_0^t a(s)y(s)\,ds, \quad w = z - y$$

y establezca que $z$ resuelve la siguiente EDO

$$z' - a(t)z = -a(t)w(t), \quad z(0) = c_0.$$

Integrando entre 0 y $t$ y utilizando la hipótesis deduzca el resultado.

**(ii)** Considere ahora dos soluciones de un mismo sistema de $n$ ecuaciones:

$$\begin{aligned} X' = A(t)X, &\quad X(0) = X_0 \\ Y' = A(t)Y, &\quad Y(0) = Y_0, \end{aligned}$$

donde la matrix $A(t)$ tiene todas sus componentes continuas. Demuestre que, dado $T > 0$

$$|X(t) - Y(t)| \leq |X_0 - Y_0|\, e^{\int_0^t a(s)\,ds}, \quad \forall t \in [0,T],$$

donde $|\cdot|$ es la norma euclidiana y

$$a(s) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(s)}.$$

Indicación: escriba los sistemas en forma integral y utilice el resultado de la parte **(i)**.

**Problemas de Modelamiento:**

1. *(Modelo Cazador-Presa con explosión/desaparición).* Considere el sistema cazador-presa siguiente, en que $x$ e $y$ son la población de dos especies en competencia:

$$\begin{cases} x' = x^2 - 2x - xy \\ y' = y^2 - 4y + xy \end{cases}$$

**(i)** Demuestre que los puntos críticos son $(0,0)$; $(0,4)$; $(2,0)$ y $(3,1)$.

**(ii)** Pruebe que $(0,0)$ es un nodo asintóticamente estable del sistema linealizado, en que todas las trayectorias son tangentes al eje $x$, excepto dos que reposan sobre el eje $y$.

**(iii)** Pruebe que $(0,4)$ es un punto silla inestable del sistema linealizado, en que todas las trayectorias entran a lo largo de la recta que pasa por $(0,4)$ con pendiente $-2/5$, excepto dos trayectorias que salen a lo largo del eje $y$.

**(iv)** Pruebe que $(2,0)$ es un punto silla inestable del sistema linealizado, en que todas las trayectorias entran a lo largo de la recta que pasa por $(2,0)$ con pendiente 2, excepto dos trayectorias que salen a lo largo del eje $x$.

**(v)** Pruebe que $(3,1)$ es un punto espiral inestable del sistema linealizado.

**(vi)** Esboce el diagrama de fases aproximado para $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

**(vii)** A partir del diagrama justifique la siguiente afirmación: *en el universo de este modelo o bien las dos poblaciones crecen indefinidamente o bien ambas especies están condenadas a desaparecer.*

2. *(Modelo de combustión).* Considere el siguiente sistema no lineal como modelo para una combustión:

$$\begin{cases} x' = 2xy^2 + x^2y + x^3, \quad x(0) = x_0 \\ y' = y^3 - x^3, \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

**(i)** Demuestre que el único punto crítico del sistema es $(x^*, y^*) = (0,0)$.

**(ii)** Demuestre que, para condiciones iniciales no nulas, la solución del sistema diverge en tiempo finito, esto es, ocurre una *explosión*. Para ello siga las siguientes indicaciones:

**(a)** Para $\delta > 0$ considere $x_0^2 + y_0^2 = \delta^2$. Sea $(x(t), y(t)),\ t \geq 0$ la solución asociada a estas condiciones iniciales. Sea $R(t) = x^2(t) + y^2(t),\ t \geq 0$. Demuestre que $R' = 2R^2$.

**(b)** Calcule $R(t)$ y pruebe que $R(t) \to +\infty$ si $t \to 1/(2\delta^2)$ por la izquierda.

**(iii)** A partir de lo anterior demuestre que el sistema es inestable en torno a $(0,0)$.

3. *(Efecto de una Plaga).* Un modelo simple predador-presa para lobos y liebres asume que la población $x(t)$ de lobos aumenta a una tasa proporcional a la población de liebres $y(t)$ y se reduce por una tasa de mortalidad. Similarmente, la población de liebres se reduce proporcionalmente a la población de lobos, pero está sustentada por una mayor tasa de nacimientos. El modelo se escribe como un sistema de EDO:

$$x' = -\sigma x + ay, \; y' = -bx + \eta y$$

con $a > 0$, $b > 0$, $\eta > \sigma > 0$. Durante un tiempo, las poblaciones de lobos y liebres han estado en un punto de equilibrio (pto crítico) $\overline{x} > 0$, $\overline{y} > 0$, pero repentinamente una plaga ha reducido la población de liebres a una fracción $k$ ($0 < k < 1$) de su tamaño, produciéndose un desequilibrio ecológico. Estudie qué ocurre con las poblaciones a causa de la plaga. Para ello responda:

**(i)** Interprete los cuatro parámetros del modelo. Los parámetros $a$ y $b$ son desconocidos, demuestre que $a = \sigma\overline{x}/\overline{y}$ y que $b = \eta\overline{y}/\overline{x}$, esto es $ab = \sigma\eta$.

**(ii)** En $t = 0$ ocurre la plaga. Tomando condiciones iniciales $x(0) = \overline{x}$, $y(0) = k\overline{y}$, resuelva el sistema para la población de liebres $y(t)$. (Puede usar el método que más le convenga).

**(iii)** Demuestre que las liebres se extinguen ($y(T) = 0$) en un tiempo:

$$T = \frac{1}{\eta - \sigma}\ln\left(1 + \frac{k}{1-k}(1 - \frac{\sigma}{\eta})\right).$$

4. Un modelo más realista para el sistema cazador-presa del problema anterior está dado por el sistema no lineal ($a > 0$, $b > 0$, $\nu > 0$, $\sigma > 0$)

$$x' = -\sigma x + axy,\ y' = -bx + \eta y.$$

El producto $xy$ trata de modelar el hecho que los lobos no pueden comer conejos hasta que los localizan. Supondremos además que $0 < \sigma < \eta < 4\sigma$.

**(i)** Encuentre los dos puntos críticos de este sistema. Calcule la matriz jacobiana asociada al sistema.

**(ii)** Determine el tipo de los puntos críticos (nodo, pto. silla o pto. espiral) y su estabilidad (inestable, asintóticamente estable). Dibuje los diagramas de fase para cada punto crítico precisando la dirección del tiempo y asíntotas o tangentes.

**(iii)** Dibuje un diagrama global del sistema no lineal para $x \geq 0$, $y \geq 0$.

**(iv)** Del modelo real se sabe que si $y(T) = 0$ para algún $T > 0$ entonces $y(t) = 0$, $\forall t \geq T$. Observe además que de la primera ecuación si $y(T) = 0$ entonces $x(t)$ decrece exponencialmente para $t \geq T$. A partir de esto y del diagrama de fases dibuje la trayectoria hasta $(0,0)$ del desequilibrio ecológico descrito en la pregunta anterior.

5. (Ex-2003-1-Osses) Considere el péndulo invertido (varilla rígida de largo $L > 0$) de la figura donde compiten en la dinámica del desplazamiento angular $\theta$, por un lado, la fuerza de restitución de un resorte de rigidez $k > 0$, que tiende a llevar a la vertical al péndulo, y por otro su peso $mg$, que tiende a alejarle de la vertical. Un modelo propuesto es:

$$m\theta'' = -kL\theta + mg(\theta - \frac{\theta^3}{3!}). \tag{5}$$

**(i)** Escriba la EDO (5) como un sistema no lineal autónomo de dos ecuaciones de primer orden en las variables $x = \theta$ e $y = \theta'$.

**(ii)** Para analizar los puntos críticos supondremos que el parámetro

$$\alpha = \frac{kL}{mg} < 1$$

Demuestre que en este caso hay tres puntos críticos:

$$(0,0), (-\sqrt{6(1-\alpha)}, 0), (\sqrt{6(1-\alpha)}, 0).$$

**(iii)** Calcule el jacobiano en estos puntos críticos y demuestre que son aislados.

**(iv)** Clasifique los puntos críticos según tipo y estabilidad. Si son espirales o centros, indique la dirección del giro. Si son nodos o puntos silla, indique direcciones propias. Haga un gráfico cualitativo para cada uno de ellos en el diagrama de fases.

**(v)** ¿Qué se puede inferir sobre el sistema no lineal (5) a partir del análisis lineal anterior?

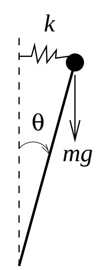



Figura 1: Péndulo invertido