Algo sobre Sistemas Lineales y No Lineales de EDOs

André de Laire P.

1 de julio de 2004

Teorema 1 (Descomposición de Jordan). *Para toda matriz* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$*, existe una Forma de Jordan* J *asociada, y una matriz* P *invertible tal que:*

$$A = PJP^{-1}.$$

Además, la matriz J *es única, salvo permutaciones de sus bloques.*

Proposición 1. *Los elementos de una cadena de Jordan son linealmente independientes.*

Proposición 2. *El número* k_s *de cadenas de Jordan de largo* s *es*

$$k_s = 2l_s - l_{s-1} - l_{s+1},$$

donde $l_s = \dim\ker(A - \lambda I)^s$.

Ejemplo 1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A tiene valores propios $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad algebraica 1, y $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad algebraica 4. De esta forma sabemos que la matriz J estará formada por dos suprabloques, uno asociado a cada valor propio.
Para λ_1, como tiene multiplicidad 1, sólo le correponderá un bloque de Jordan de tamaño 1, y tomamos como vector propio asociado $(0, 1, 1, 0, 0)$.
Para λ_2 calculamos:

$$\begin{aligned} l_1 &= \dim\ker(A - I) = 2 \\ l_2 &= \dim\ker(A - I)^2 = 4 \\ l_3 &= \dim\ker(A - I)^3 = 4 \\ l_s &= \dim\ker(A - I)^s = 4, \forall s > 3. \end{aligned}$$

Como $l_0 = 0$, tenemos que $k_1 = 0$ y $k_2 = 2$, por lo que no hay cadenas de largo 1, pero hay 2 cadenas de largo 2. Cada cadena de largo 2 determina un bloque de 2×2, por lo que tenemos completamente determinada la matriz J

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para λ_2 tenemos:

$$\begin{aligned} (A - I)v_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad v_1 = (\alpha, \alpha, 0, \beta, \beta) \\ (A - I)v_2 = v_1 \quad &\Rightarrow \quad v_2 = (\beta + \gamma, \gamma, \alpha, \alpha + \delta, \delta). \end{aligned}$$

Si $\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow v_1 = (0, 0, 0, 1, 1) \Rightarrow v_2 = (1 + \gamma, \gamma, 0, \delta, \delta)$. Si $\gamma = \delta = 0 \Rightarrow v_2 = (1, 0, 0, 0, 0)$.
Si $\alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow v_1 = (1, 1, 0, 0, 0) \Rightarrow v_2 = (\gamma, \gamma, 1, 1 + \delta, \delta)$. Si $\gamma = \delta = 0 \Rightarrow v_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$.
De esta forma

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Ejemplo 2. Consideremos el sistema:

$$X' = AX,$$

con condición inicial $X(0) = X_0$, donde la matriz A está dada en el ejemplo (1). Luego como ya habíamos calculado su descomposición canónica de Jordan , se tendrá en virtud de la proposición anterior que la solución es:

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} X_0,$$

con P descrita en ejemplo (1).

■

Definición 1. *Dado I un intervalo abierto no vacío, y una función $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se define un sistema de ecuaciones diferenciable de primer orden con condición inicial $X_0 \in R^n$ en $t_0 \in I$, por:*

$$\begin{aligned} X' &= F(t, X), \ t \in I \\ X(t_0) &= X_0. \end{aligned}$$

Si la función F es no lineal con respecto a la varible X, se dirá que es un sistema no lineal (SNL). *Si además F no depende explícitamente de la variable t, se dirá que es un sistema no lineal* autónomo $(SNLA)$.
Se llama vector de estado *a $X(t) \in \mathbb{R}^n$, que es la solución del sistema en un punto $t \in I$.*

Observación. Dada una función $h : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, toda ecuación de orden superior de la forma:

$$\begin{aligned} &y^{(n)} = h(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ &y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{aligned}$$

se puede llevar mediante un cambio de variables a la forma (SNL). Asimismo si h no depende explícitamente de t, se puede llevar a la forma $(SNLA)$.

Observación. Un $(SNLA)$ corresponde en el caso mecánico a un movimiento sin forzamiento externo. Además, en el caso que los coeficientes sean constantes, es invariante bajo traslaciones temporales (variable t).

Ejemplo 3 (Conejos y ovejas). Supongamos un modelo para la competencia de dos poblaciones de animales: conejos x y ovejas y, que luchan por el pasto en un habitad reducido:

$$\begin{aligned} x' &= 60x - 3x^2 - 4xy \\ y' &= 42y - 3y^2 - 2xy. \end{aligned}$$

Los puntos críticos de este sistema se encuentran resolviendo:

$$\begin{aligned} 60x - 3x^2 - 4xy = 0 = x(60 - 3x - 4y) = 0 \\ 42y - 3y^2 - 2xy = y(42 - 3y - 2x) = 0. \end{aligned}$$

Luego tenemos varios casos.

- Si $x = 0$ entonces $y = 0$ o $42 - 3y - 2x = 0$, de donde obtenemos los puntos: $(0, 0)$ y $(0, 14)$.
- Si $y = 0$ entonces $x = 0$ o $60 - 3x - 4y = 0$, de donde obtenemos los puntos: $(0, 0)$ y $(20, 0)$.
- Si $x \neq 0$, $y \neq 0$, entonces resolvemos

  $$\begin{aligned} 60 - 3x - 4y = 0 \\ 42 - 3y - 2x = 0, \end{aligned}$$

  de donde se tiene $(\bar{x}, \bar{y}) = (12, 6)$.

Por tanto, $\mathcal{C} = \{(0, 0), (0, 14), (20, 0), (12, 6)\}$.
El conjunto anterior muestra los casos de equilibrios entre ambas poblaciones. El único caso en que pueden existir ambas especies es $(\bar{x}, \bar{y}) = (12, 6)$, en el resto, por lo menos una de las especies se extingue, pero aún así todas son soluciones de equilibrio.

El Jacobiano en este caso está dado por:

$$J(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60-6x-4y & -4x \\ -2y & 42-6y-2x \end{pmatrix}.$$

Se evalúa ahora el Jacobiano en cada punto crítico, para tener el sistema linealizado respectivo:

(i) $J(0,0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$ que es invertible: $ad - bc = 60 \cdot 42 \neq 0$, y

$$(SL)_1 \begin{cases} x' = 60(x-0) + 0(y-0) = 60x \\ y' = 0(x-0) + 42(y-0) = 42y \end{cases}$$

(ii) $J(20,0) = \begin{pmatrix} -60 & -80 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ que es invertible: $ad - bc = -60 \cdot 2 \neq 0$, y

$$(SL)_2 \begin{cases} x' = -60(x-20) - 80(y-0) \\ y' = 0(x-20) + 2(y-0) = 2y \end{cases}$$

(iii) $J(0,14) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -28 & -42 \end{pmatrix}$ que es invertible: $ad - bc = -42 \cdot 4 \neq 0$, y

$$(SL)_3 \begin{cases} x' = 4x \\ y' = -28x - 42(y-14) \end{cases}$$

(iv) $J(12,6) = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$ que es invertible: $ad - bc = (-36)(-42) - (-12)(-48) = 72 \neq 0$, y

$$(SL)_4 \begin{cases} x' = -36(x-12) - 48(y-6) \\ y' = -12(x-12) - 18(y-6) \end{cases}$$

Finalmente concluimos que el modelo de conejos y ovejas es cuasilineal en torno a todos sus puntos críticos. ■

Teorema 2 (Existencia y unicidad local en tiempo). *Dado un (SNL), si existe $\delta > 0$ tal que $I_0 = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq \delta\} \subseteq I$, y existe $r > 0$ tal que $F(\cdot, X)$ es continua (en t) $\forall |t - t_0| \leq \delta$, $\forall |X - X_0| \leq r$. Si además existe una constante real $L > 0$ (constante de Lipshitz) tal que:*

$$|F(t,X) - F(t,Y)| \leq L\,|X - Y|\,,\ \forall |X - X_0| \leq r, \forall |Y - X_0| \leq r, \forall |t - t_0| \leq \delta.$$

Entonces existen $M > 0$ y $\bar{\delta} = \min\{\delta, r/M\}$, tal que existe una única solución del (SNL) $X(\cdot) : [t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que resulta ser continuamente derivable en $]t_0 - \bar{\delta}, t_0 + \bar{\delta}[$.

Observación. El teorema anterior asegura solamente la existencia de una solución local, en una vecindad centrada de t_0, que no depende del valor de la constante de Lipshitz.

Ejemplo 4. Veamos la siguiente ecuación no lineal definida en todo $\mathbb{R}$:

$$y' = -y^2$$
$$y(t_0) = y_0$$

Claramente cumple todas las hipótesis del teorema en todo subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pues si tomamos la bola $B(y_0, r) \subseteq \mathbb{R}$, para algún $r > 0$:

$$|-y_1^2 + y_2^2| = |y_2 - y_1||y_2 + y_1| \leq L|y_2 - y_1|,$$

con $L = 2|y_0| + 2r$, y

$$\max_{|y-y_0|\leq r} |y^2| = (|y_0| + r)^2.$$

Luego $\bar{\delta} = \frac{r}{(|y_0|+r)^2}$. Es fácil ver mediante derivación que la función $\bar{\delta}(r) = \frac{r}{(|y_0|+r)^2}$, alcanza su máximo en $r = |y_0|$, por lo que $\bar{\delta} \leq \frac{1}{4|y_0|}$. Eligiendo el r señalado, tenemos que en el mejor de los casos el teorema de existencia y unicidad nos garantiza una única solución definida en el intervalo $[t_0 - \frac{1}{4|y_0|}, t_0 + \frac{1}{4|y_0|}]$. Sin embargo, por métodos usuales para este tipo de ecuaciones, podemos calcular explícitamente que la solución está dada por:

$$y(t) = \frac{1}{t - t_0 + \frac{1}{y_0}},$$

donde vemos que el intervalo maximal (i.e. el mayor de los intervalos con el orden de la inclusión de conjuntos) donde es posible definir la solución es $(t_0 - \frac{1}{y_0}, \infty)$, si $y_0 > 0$, y $(-\infty, t_0 - \frac{1}{y_0})$, si $y_0 < 0$. Pese a esto, tenemos que aunque el problema está bien definido en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es imposible tener una única solución definida en todo $\mathbb{R}$.

Definición 2. *Se llama* punto crítico *(o* punto de equilibrio*) de un sistema al punto $(\bar{x}, \bar{y})$ cuando cumple que:*

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$
$$G(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

El conjunto de puntos críticos del sistema se denota por

$$\mathcal{C} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid F(\bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}) = 0\}.$$

Un punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ se dice aislado *si existe $\delta > 0$ tal no existe otro punto crítico en la bola*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 < \delta^2\},$$

de lo contrario se dice que los puntos críticos son densos *en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$.*

Definición 3. *Un sistema $(SNLA)$ se dirá* cuasilineal *en torno a $(\bar{x}, \bar{y})$ si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$.*

Propiedades 1. *Dado un $(SNLA)$, y $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico de este sistema:*

(i) Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$, entonces $(\bar{x}, \bar{y})$ es el único punto crítico del (SL), donde resulta ser aislado.

(ii) Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| = 0$, entonces los puntos críticos del (SL) son densos. Más aún, su lugar geométrico es una recta (que contiene a $(\bar{x}, \bar{y})$) si algún coeficiente del Jacobiano es distinto de cero, y es todo el plano en caso de que el Jacobiano tenga todo sus términos nulos.

(iii) Si $|J(\bar{x}, \bar{y})| \neq 0$, entonces $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto crítico aislado del $(SNLA)$.

Ejemplo 5. Consideremos el sistema autónomo definido para todo $t \in R$ por:

$$\begin{cases} x' = x^3 \\ y' = y^3 \end{cases},$$

que tiene el punto crítico aislado $(0,0)$, y

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que no este sistema no es cuasilineal en torno al $(0,0)$. Si intentamos hacer la linealización en torno a $(0,0)$ queda:

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases},$$

cuyos puntos críticos son $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$, como efectivamente lo asegura la propiedad (ii) de (1). ■

Al calcular los valore propios del Jacobiano en un pubto crítico, puede ocurrir (solamente) alguno de los siguientes casos:

(I) Casos Principales

- (i) λ_1, λ_2 reales, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, de igual signo.
- (ii) λ_1, λ_2 reales, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, de distinto signo.
- (iii) λ_1, λ_2 complejos conjugados, con parte real no nula.

(II) Casos Frontera

- (i) λ_1, λ_2 reales,$\lambda_1 = \lambda_2$
- (ii) λ_1, λ_2 complejos conjugados, con parte real nula (imaginarios puros)

Teorema 3 (Poincaré). *Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico de un $(SNLA)$ cuasilineal, y λ_1, λ_2 los valores propios de $J(\bar{x}, \bar{y})$, entonces el punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ en el $(SNLA)$ será:*

(i) Un nodo *si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, distintos y de igual signo.*
En este caso además todas los trayectorias (excepto dos) son tangentes en $(\bar{x}, \bar{y})$ a la dirección propia asociada al valor propio de módulo menor. Las otras dos, están sobre la otra dirección propia.

(ii) Un punto silla *si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, de distinto signo.*
En este caso además hay dos trayectorias convergentes a $(\bar{x}, \bar{y})$ en la dirección propia asociada al valor propio negativo, y dos divergentes en la dirección propia asociada al valor propio positivo. Las demás, tienen como asíntotas las direcciones propias.

(iii) Un punto espiral *si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, $\Re(\lambda_1) \neq 0$ y $\Re(\lambda_2) \neq 0$*

Teorema 4 (Liapunov). *Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto crítico de un $(SNLA)$ cuasilineal, y λ_1, λ_2 los valores propios de $J(\bar{x}, \bar{y})$, entonces el punto crítico $(\bar{x}, \bar{y})$ en el $(SNLA)$ será:*

(i) Asintóticamente estable *si $\Re(\lambda_1) < 0$ y $\Re(\lambda_2) < 0$.*

(ii) Inestable *si $\Re(\lambda_1) > 0$ o $\Re(\lambda_2) > 0$.*

Observación. Por simplicidad en los teoremas anteriores se ha hecho referencia a las trayectorias, cuando se quiere referir a su recorrido en el diagrama de fases.

Observación. Los resultados anteriores son la base del análisis de los sistemas no lineales, pero no nos dicen nada en los casos en que los valores propios toman los valores frontera.

Ejemplo 6 (Continuación de conejos y ovejas). Volvamos nuevamente al ejemplo de conejos compitendo con las ovejas:

$$\begin{aligned} x' &= 60x - 3x^2 - 4xy \equiv F(x,y) \\ y' &= 42y - 3y^2 - 2xy \equiv G(x,y), \end{aligned}$$

y sabemos que:

$$\mathcal{C} = \{(0,0), (0,14), (20,0), (12,6)\}.$$

Vimos que este sistema era casi lineal entorno a estos cuatro puntos críticos, por lo que le podemos analizar los sistemas linealizados, y por las propiedades de Poincaré y Liapunov, sabremos que se mantiene su naturaleza para el $(SNLA)$.
El Jacobiano era:

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 - 6x - 4y & -4x \\ -2y & 42 - 6y - 2x \end{pmatrix}.$$

Luego en cada punto crítico tenemos:

1. $J(0,0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 42 \end{pmatrix}$ que tiene los valores propios: $\lambda_1 = 60$, $\lambda_2 = 42$, por lo que el punto crítico $(0,0)$ es un nodo inestable.
   Los vectores propios asociados son
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   respectivamente, por lo que los recorridos de las trayectorias son tangentes a la dirección v_2.

2. $J(20,0) = \begin{pmatrix} -60 & -80 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ que tiene los valores propios: $\lambda_1 = -60$, $\lambda_2 = 2$, por lo que el punto crítico $(20,0)$ es un punto silla inestable.
   Los vectores propios asociados son
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 80 \\ -62 \end{pmatrix},$$
   respectivamente, por lo que el eje de las recorridos de las trayectorias convergentes es la dirección v_1.

3. $J(0,14) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -28 & -42 \end{pmatrix}$ que tiene los valores propios: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -42$, por lo que el punto crítico $(0,14)$ es un punto silla inestable.
   Los vectores propios asociados son
$$v_1 = \begin{pmatrix} 46 \\ -28 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   respectivamente, por lo que el eje de los recorridos de las trayectorias convergentes es la dirección v_2.

4. $J(12,6) = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -12 & -18 \end{pmatrix}$ que tiene los valores propios: $\lambda_1 = -27 - 3\sqrt{73} \approx -52{,}6$, $\lambda_2 = -27 + 3\sqrt{73} \approx -1{,}4$ por lo que el punto crítico $(12,6)$ es un nodo asintóticamente estable.
   Los vectores propios asociados son
$$v_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ -3+\sqrt{73} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ -3-\sqrt{73} \end{pmatrix},$$
   respectivamente, por lo que los recorridos de trayectorias son tangentes a la dirección v_2.

En conclusión tenemos que en el punto $(0,0)$ donde ambas especies desaparecen es inestable, al igual que cuando una sola especie sobrevive en los puntos $(20,0)$ y $(0,14)$. El punto $(12,6)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable, por lo que si tomamos cualquier condición inicial que no sean los otros puntos críticos, tendremos que en un tiempo suficientemente extenso se dará la coexistencia de conejos y ovejas en las vecindades del punto $(12,6)$. El diagrama de fase queda esbozado en la figura 1. ■

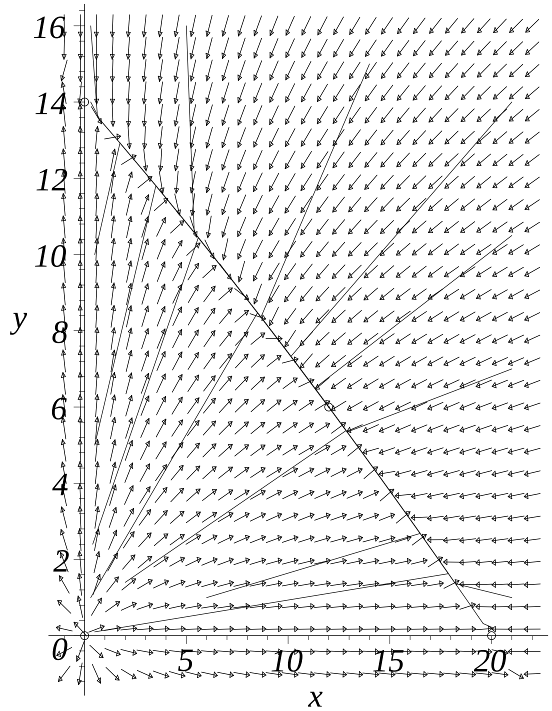


Figura 1: Diagramas de fase del modelo de conejos y ovejas

Ejemplo 7 (Traza-determinante). Consideremos el sistema lineal $X' = AX$ con $A \in M_{2\times2}(R)$ matriz constante invertible. Como entre las principales características de una matriz están su determinante y su traza, que determinan un plano traza/determinante (ver Figura 2) con distintas regiones, queremos tratar de representar en estas regiones la información sobre el único punto crítico que posee, el origen (pues A es invertible).

Podemos escribir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, cuyo polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A),$$

con raíces

$$\lambda = \frac{-tr(A) \pm \sqrt{tr(A)^2 - 4\det(A)}}{2}.$$

Según vimos, lo primero que habría que distinguir son las raíces reales de las complejas, es decir, estudiar el discriminante

$$tr(A)^2 - 4\det(A).$$

Como nos interesa el plano traza/determinante, usaremos para simplificar la notación

$$x = tr(A),\ y = \det(A);$$

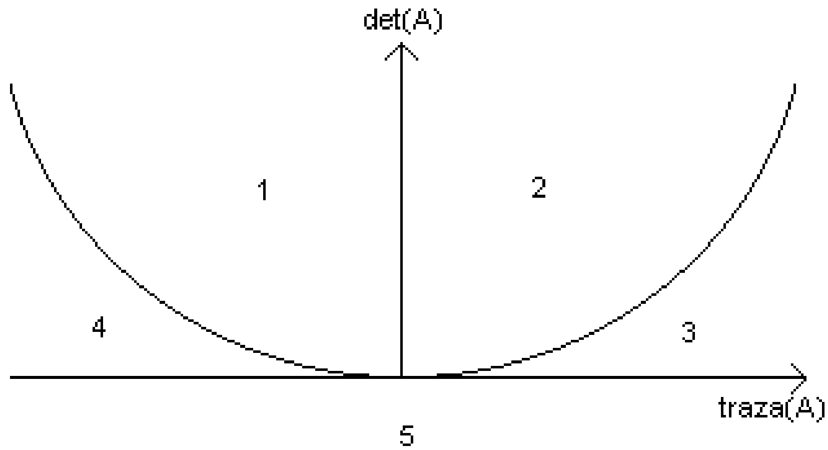


Figura 2: Plano traza/determinante.

así se ve claramente que la curva $x^2 - 4y = 0$ es una parábola.
Cuando estemos en el caso $4y > x^2$ (sobre la parábola), tendremos el caso de raíces complejas conjugadas, y por tanto el punto crítico será un punto espiral si $x \neq 0$, siendo estable si $x > 0$ (zona 2) e inestable en caso contrario (zona 1). Si $x = 0$, tenemos un centro.
En el caso $4y < x^2$ (bajo la parábola), tenemos que separar en casos, según el signo de y (el determinante):

- $y = \det(A) > 0$
  Las raíces son reales y siempre tienen igual signo, y es el signo de x. Si $x > 0$, la parte real de las raíces es negativa, y por tanto tenemos un nodo asintóticamente estable (zona 3), y si $x < 0$ sera inestable (zona 4).

- $y = \det(A) < 0$
  Las raíces son reales y siempre tienen distinto signo, por lo que tendremos sólo puntos sillas inestables en la zona 5.

Sobre la parábola tenemos el caso $tr(A) = \det(A) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, por lo que se tienen nodos inestables si $x > 0$ y nodos asintóticamente estables si $x < 0$.

Hemos concluido así una forma que nos permite tener una idea general del punto crítico de un sistema sólo viendo la traza y determinante de la matriz, sin tener que calcular valores y vectores propios explícitamente (aunque en realidad la traza y el determinan determinan únicamente a los valores propios, y viceversa). Sin embargo, si queremos un gráfico preciso del diagrama de fases es inevitable calcular los vectores propios, pues indican las direcciones de tangencia de las trayectorias, para el caso que corresponda. ■

Ejercicio Resuelto 1. Considere el siguiente sistema no lineal:

$$(SNL1)\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2) \\ x(0) = r_0 > 0,\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Demuestre que el único punto crítico es el $(0,0)$.
Sol.
Tenemos:
$$-y + x(1 - x^2 - y^2) = 0$$
$$x + y(1 - x^2 - y^2) = 0$$
Claramente el punto $(x,y) = (1,1)$ no es punto crítico, luego despejamos un $x = y/(1-x^2-y^2)$ y reemplazamos en la segunda ecuación, resultando:
$$\frac{y}{(1-x^2-y^2)} + y(1-x^2-y^2) = 0 \Rightarrow y\left(\frac{1+(1-x^2-y^2)^2}{1-x^2-y^2}\right) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$
Por tanto el único punto crítico es el $(0,0)$, y por ende es aislado

2. Obtenga el sistema linealizado.
Hay que calcular el Jacobiano y evaluarlo en el punto crítico $(0,0)$.
$$\left.\begin{pmatrix} 1-3x^2-y^2 & -1-2xy \\ 1-2xy & 1-x^2-3y^2 \end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Como $\det(J(0,0)) = 2$, el sistema es cuasilineal, pero hacer esto, es lo mismo que analizar el sistema:
$$x' = x - y$$
$$y' = x + y$$
con lo que estamos perdiendo toda la información no lineal caracterísita del problema. En este caso siguieramos el camino tradicional, obtenemos los valores propios $1 \pm i$, lo que nos dicen que el $(0,0)$ es un punto espiral inestable. Pero el comportamiento real del $(SNL1)$ es mucho más interesante que eso.

3. Tomando $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y derivando las expresiones $x^2 + y^2 = r^2$ e $\theta = \arctan(y/x)$ deduzca que:
$$xx' + yy' = rr', \qquad xy' - x'y = r^2\theta'$$
Sol.
Lo que aquí estamos haciendo es un cambio a coordenadas polares, muy útil dada la simetría

radial del problema.
De la regla de la cadena, es directo que al derivar $x^2 + y^2 = r^2$ resulta

$$2xx' + 2yy' = 2rr'$$

Y al derivar $\theta = \arctan(y/x)$ queda:

$$\theta' = \frac{1}{1 + y^2/x^2} \cdot \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{xy' - y}{r^2}$$

4. Multiplicando en (SNL1) la primera ecuación por x, la segunda por y y luego la primera por y y la segunda por x y combinando deduzca que:

$$(SNL2) \begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ \theta' = 1 \\ r(0) = r_0, \; \theta(0) = 0 \end{cases}$$

Analizando directamente este sistema explique qué ocurre si $r_0 = 1$.
Sol.
Al multiplicar la primera ecuación por x, la segunda por y, sumar las ecuaciones queda:

$$xx' + yy' = (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) \Rightarrow xx' + yy' = r^2(1 - x^2 - y^2) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{por iii}} r' = r(1 - r^2)$$

Al multiplicar la primera ecuación por y, la segunda por x, y restar las ecuaciones queda:

$$xy' - x'y = x^2 + y^2 \Leftrightarrow xy' - x'y = r^2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{por iii}} \theta' = 1$$

Si en el nuevo sistema $r_0 = 1$ entonces $r' = 0 \Rightarrow r(t) = r_0 = 1 \; \forall t$ Y también se tiene $\theta(t) = t \; \forall t$. En coordenadas polares lo anterior nos dice que el recorrido de la trayectoria es una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, es decir, una trayectoria cerrada. Si se toma cualquier condición inicial el esta circunferecia, el sistema evoluciona sin salirse de ella.

5. Resuelva y demuestre que:

$$r^2(t) = \frac{1}{1 + k_0 e^{-2t}}, \qquad k_0 = \frac{1 - r_0^2}{r_0^2}, \qquad \theta(t) = t.$$

Sol. El sistema nuevo es de variables separable:

$$\frac{dr}{r(1 - r)^2} = dt$$

pero por fracciones parciales

$$\frac{dr}{r(1 - r)^2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2(1 - r)} + \frac{-1}{2(1 + r)}$$

entonces:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r(1-r)^2} = \int_0^t dt \Rightarrow ln(\frac{r^2}{1-r^2}) - ln(\frac{r_0^2}{1-r_0^2}) = 2t \Rightarrow r^2(t) = \frac{1}{1+k_0e^{-2t}}$$

con $k_0 = \frac{1-r_0^2}{r_0^2}$.
Y claramente $\theta(t) = t$

6. Si $r_0 < 1$ demuestre que $r(t) < 1$, $\forall t \geq 0$ y que $\lim_{t\to\infty} r(t) = 1$. Análogamente pruebe que si $r_0 > 1$ entonces $r(t) > 1$, $\forall t \geq 0$ y que $\lim_{t\to\infty} r(t) = 1$.
   Sol. Si $0 < r_0 < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{r_0^2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{r_0^2} - 1 = k_0 \Rightarrow 1 < 1 + k_0e^{-2t} = \frac{1}{r^2} \Rightarrow r^2 < 1$
   Si $1 < r_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{r_0^2} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{r_0^2} - 1 = k_0 < 0 \Rightarrow e^{-2t} < k_0e^{-2t} < 0 \Rightarrow 1 - e^{-2t} < 1 + k_0e^{-2t} < 1 \Rightarrow 1 < r^2$
   Cualquiera sea r_0,
   $$\lim_{t\to\infty} k_0e^{-2t} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} r(t) = 1$$

7. Haga un diagrama de fases considerando el análisis de los puntos anteriores.
   Si $r_0 < 1$, como $r' = r(1-r^2)$, entonces $r' > 0$ en ese punto, es decir, la longitud del radio va creciendo, es decir las trayectorias van en una especie de espiral hacia afuera, acercándose como límite a la trayectoría cerrada de radio 1.
   Análogamente, para $r_0 > 1$, entonces $r' < 0$, la trayectoría va en una clase de espiral hacia adentro, y tiene como límite la misma trayectoría unitaria.
   (Junto con la información de *vi*, ahora pueden confeccionar el diagrama de fases).

■

Ejercicio Resuelto 2. Considere el sistema lineal

$$(SL)\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& -qx + \frac{p}{2}y \\ y' &=& qx - \frac{1}{2}y + pz \\ z' &=& -\frac{q}{2}y - pz \end{array}\right.$$

donde p, q son constantes no negativas que cumplen la propiedad $p+q = 1$. El sistema (SL) modela las poblciones x de "*aa*", y de "*ab*", z de "bb", donde "*a*" y "*b*" son dos alelos de un mismo gen que aparecen con las frecuencias p y q en una poblacion T.

1. Escriba(SL) de la forma matricial $X' = AX$, donde $X = (x, y, z)^t$. Encuentre los valores propios de de A. ¿ Qué forma tiene la solucion general de (SL) ?. Analice cuando $t \to \infty$
   Sol.
   Al escribir el sistema matricialmente, resulta
   $$A = \left(\begin{array}{ccc} -q & \frac{p}{2} & 0 \\ q & -\frac{1}{2} & p \\ 0 & -\frac{q}{2} & -p \end{array}\right)$$

Luego el polinomo característico es:

$$p(\lambda) = (-q-\lambda)(-\frac{1}{2}-\lambda)(-p-\lambda) + \frac{1}{2}(q+\lambda)pq + \frac{1}{2}(p+\lambda)pq$$

Pero usando que $p+q=1$, lo anterior se simplifica a:

$$p(\lambda) = -(\frac{1}{2}+\lambda)\lambda(1+\lambda)$$

Que tiene las raíces: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = -1$
Luego como los valores propios son distintos, A es diagonalilzable, y la solución general de (SL) es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_{p_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_{p_2} + c_3 e^{\lambda_3 t}\vec{v}_{p_3}$$

donde $\vec{v_{p_i}}$ es el vector propio asociado al valor propio λ_i. Reemplazando los valores obtenidos para los valores propios:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1\vec{v}_{p_1} + c_2 e^{-t/2}\vec{v}_{p_2} + c_3 e^{-t}\vec{v}_{p_3}$$

De esta forma, cuando $t \to \infty \Rightarrow e^{-t/2}, e^{-t} \to 0$, y así

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to c_1\vec{v}_{p_1} = \vec{k}$$

Donde $\vec{k}$ representa un vector constante, es decir, las poblaciones de parejas de alelos "aa", "ab", "bb" tienden a valores constantes cuando $t \to \infty$

2. Demuestre que la solución de equilibrio o puntos críticos del sistema (SL) están formados por el conjunto

$$R = \{\ \alpha(p^2, 2pq, q^2)\ , \alpha \in \mathbb{R}\}$$

¿ Qué representa geométricamente R ?
Sol:
Para encontrar los puntos críticos resolvemos:

$$\begin{array}{lcrl} x' = 0 & & -qx + \frac{p}{2}y & = 0 \\ y' = 0 & \Rightarrow & qx - \frac{1}{2}y + pz & = 0 \\ z' = 0 & & -\frac{q}{2}y - pz & = 0 \end{array}$$

Pero como hay un valor propio nulo el sistema tiene una ecuacion linealmente dependiente (l.d.), luego basta considerar solo dos ecuaciones, para resolver el sistema, por ejemplo, si tomamos la primera y la última, tenemos:

$$x = \frac{p}{2q}y \ , \ z = \frac{q}{2p}y$$

Donde y queda libre (sistema con un grado de libertad). Luego el conjunto de puntos críticos quedan caracterizado por el subespacio vectorial:

$$\{ \ y(\frac{p}{2q}, 1, \frac{q}{2p}) \ , y \in \mathbb{R}\}$$

Basta tomar $y = 2pq\alpha$ (α nuevamente variable) y tenemos el resultado buscado:

$$R = \{ \ \alpha(p^2, 2pq, q^2) \ , \alpha \in \mathbb{R}\}$$

que geométricamente en $\mathbb{R}^3$ representa una recta que pasa por el origen, y como tal es un subespacio vectorial.

3. Si $T(t) = x(t) + y(t) + z(t)$ es la poblacion total, y $x(0), y(0), z(0)$ son las condiciones iniciales (no negativas) de (SL), demuestre que T es constante, esto es

$$T(t) = T_0 \equiv x(0) + y(0) + z(0) \quad \forall t$$

Sol.
Derivando T

$$T' = x'(t) + y'(t) + z'(t) = -qx + \frac{p}{2}y + qx - \frac{1}{2}y + pz + \frac{q}{2}y - pz = \frac{1}{2}y\underbrace{(p+q)}_{1} - \frac{1}{2}y = 0$$

Por lo tanto $T(t) = T(0) = T_0 \quad \forall t$

4. Sabiendo de la parte anterior que la solución de (SL) está en el plano:

$$\Pi_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = T_0\}$$

determine la *única* solución de equilibrio de (SL) (Equilibrio de Hardy-Weinberg).
Sol:
Como la solución está en el plano Π_0 y R es la recta de puntos de equilibrio del sistema, se tiene que la única solución de equilibrio queda dado por la intersección de ambos subespacios vectoriales, i.e., $R \cap \Pi_0$, calculando este punto:

$$\alpha p^2 + \alpha 2pq + \alpha q^2 = T_0 \Rightarrow \alpha = \frac{T_0}{p^2 + 2pq + q^2} = T_0$$

Así, el unico punto critico del sistema es

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2T_0 \\ 2pqT_0 \\ q^2T_0 \end{pmatrix}$$

5. Sean $p=(x+\frac{y}{2})/T_0$,$q=(\frac{y}{2}+z)/T_0$. Demuestre que:

$$(SL')\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & p^2T_0-x \\ y' & = & 2pqT_0-y \\ z' & = & q^2T_0-z \end{array}\right.$$

Sol.
Tenemos que

$$pT_0=(x+\frac{y}{2})\Rightarrow p^2T_0-x=p\cdot pT_0-x=p(x+\frac{y}{2})-x=x(p-1)+p\frac{y}{2}$$

Pero

$$p+q=1\Rightarrow p-1=-q\Rightarrow p^2T_0-x=-qx+\frac{p}{2}y=x'$$

Análogamente, se tiene que

$$q^2T_0-z=q\cdot qT_0-z=q(\frac{y}{2}+z)-z=q\frac{y}{2}+z(q-1)=q\frac{y}{2}-pz=z'$$

Ademas de la parte $iii)$ se tiene que $x'+y'+z'=0\Rightarrow y'=-(x'+y')$, entonces:

$$\begin{array}{rcl} y' & = & -(p^2T_0-x+q^2T_0-z)=-((p^2+q^2)T_0-(x+z)) \quad \text{pero } x+y+z=T_0 \\ & = & -((p^2+q^2)T_0-T_0+y))=-((p^2+q^2-1)T_0+y)) \\ & = & -y-(p^2+q^2-1)T_0=-y-((p+q)^2-2pq-1)T_0 \\ & = & -y+2pqT_0 \end{array}$$

6. Deduzca de (SL') que p y q así definidos son constantes con respecto al tiempo.
SOL

$$\begin{array}{rcl} T_0p' & = & x'+\frac{y'}{2}=p^2T_0-x+pqT_0-\frac{y}{2}=p\underbrace{(p+q)}_{1}T_0-x-\frac{y}{2} \\ & = & pT_0-(x+\frac{y}{2})=pT_0-pT_0=0 \end{array}$$

Por tanto p es constante $\forall t$

$$\begin{array}{rcl} T_0q' & = & z'+\frac{y'}{2}=q^2T_0-z+pqT_0-\frac{y}{2}=q\underbrace{(p+q)}_{1}T_0-z-\frac{y}{2} \\ & = & qT_0-(z+\frac{y}{2})=qT_0-qT_0=0 \end{array}$$

Por tanto q es constante $\forall t$

7. Resuelva (SL') e ilustre la convergencia en el espacio de fases

$$\{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

dibujando R, Π_0 con $x(0) = y(0) = z(0) = T_0/3$ y para los casos:

a) $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$

b) $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$

c) $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}$

Sol.
Veamos que las tres ecuaciones tiene la forma $w'+w = r$, multiplicando por el factor integrante e^t queda:

$$\begin{aligned} & (e^t w)' = re^t \quad \text{integrando} \\ \Rightarrow \;& e^t w = re^t + d \\ \Rightarrow \;& w = r + de^{-t} \end{aligned}$$

Luego tenemos las soluciones:

$$\begin{aligned} x &= p^2 T_0 + d_1 e^{-t} \\ y &= 2pqT_0 + d_2 e^{-t} \\ z &= q^2 T_0 + d_3 e^{-t} \end{aligned}$$

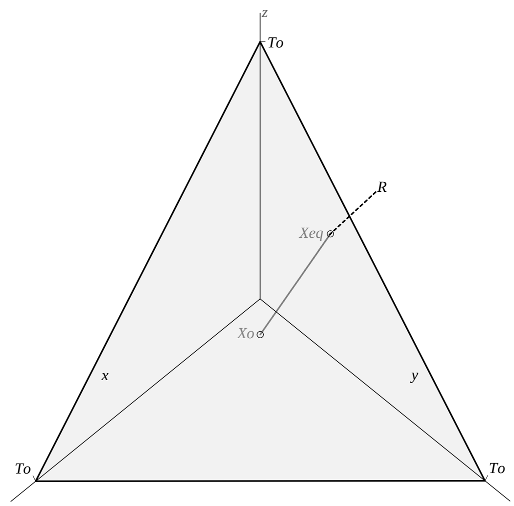
O bien

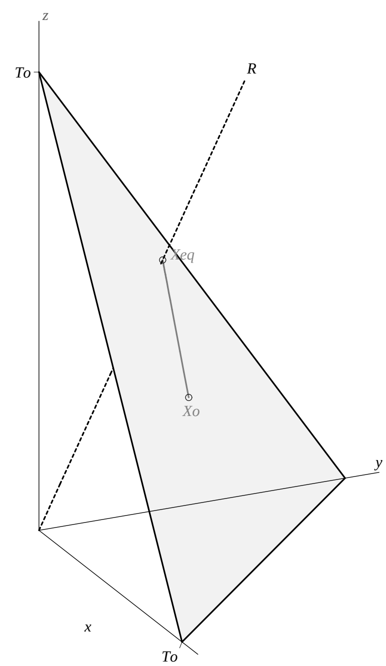
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ 2pq \\ q^2 \end{pmatrix} T_0 + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Notar que la solución es de la forma $X = X_{eq} + \vec{d}e^{-t}$, donde X_{eq} es el único punto de equilibrio del sitema dado de la restricción $x(t) + y(t) + z(t) = T_0$.
Usando ahora que $x(0) = y(0) = z(0) = T_0/3$:

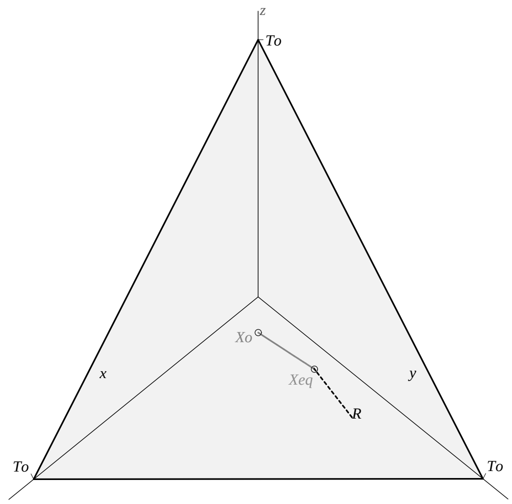
$$X_0 = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} T_0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p^2 \\ 2pq \\ q^2 \end{pmatrix} \right\} T_0$$

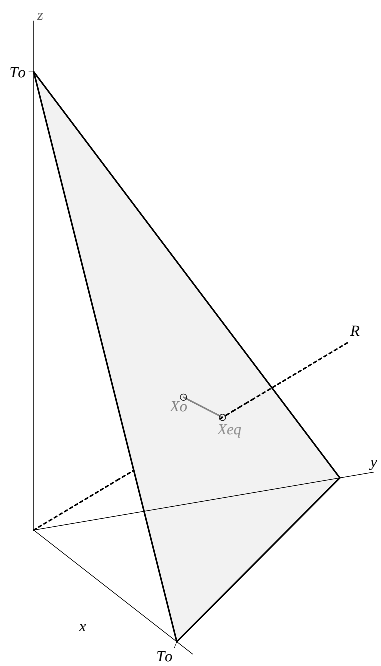
$$a) \quad p = \tfrac{1}{4}, q = \tfrac{3}{4} \Rightarrow X_{eq} = T_0 \begin{pmatrix} 1/16 \\ 6/16 \\ 9/16 \end{pmatrix}$$



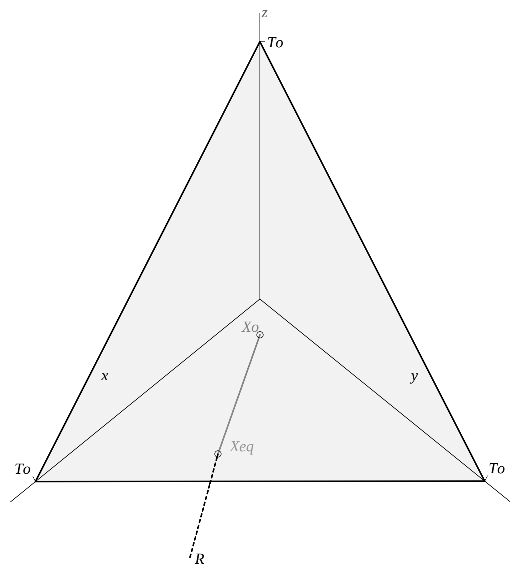


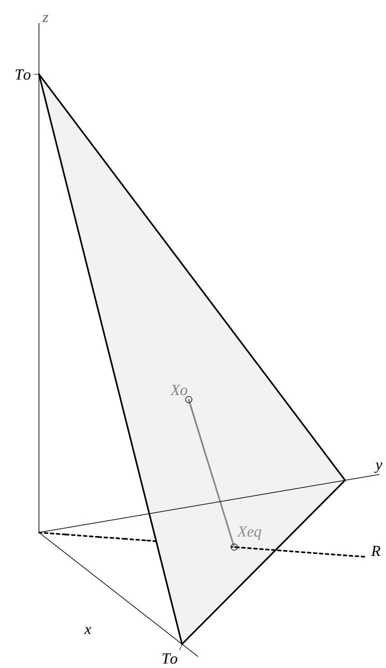
$$b) \quad p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2} \Rightarrow X_{eq} = T_0 \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$





$$c)\quad p=\tfrac{3}{4}, q=\tfrac{1}{4} \Rightarrow X_{eq} = T_0 \begin{pmatrix} 9/16 \\ 6/16 \\ 1/16 \end{pmatrix}$$





(En el examen donde salió esta pregunta, no era necesario hacer los dibujos de forma tan sofisticada, basta mostrar en 2 dimensiones más menos lo que pasaba).

■