

**MA26A Clase Teorema de Liapunov**  
**(recuperativa del día lunes 13.6.2004)**  
Semestre 2004/1

29/6/2004

Prof. Leonardo Baffico

Consideremos el sistema no lineal autónomo (SNLA)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (1)$$

en donde  $F = (f, g) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  una región en el plano  $\mathbb{R}^2$ , satisface las hipótesis necesarias para tener existencia y unicidad del problema de valor inicial (1) + condición inicial.

**Definición:** Sea  $(x_0, y_0) \in D$  un punto crítico aislado de (1). Una función  $V : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente diferenciable, se dirá *funcional de Liapunov* si  $V(x, y) > 0$ ,  $\forall (x, y) \in D \setminus \{(x_0, y_0)\}$ ,  $V(x_0, y_0) = 0$  y

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y)f(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y}(x, y)g(x, y) \leq 0, \quad \forall (x, y) \in D. \quad (2)$$

Sin pérdida de generalidad supondremos que el punto crítico aislado estará en el origen, es decir  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  y que  $(0, 0) \in D$ .

**Teorema (Liapunov):** Sea  $(0, 0)$  un punto crítico aislado de (1). Si existe un funcional de Liapunov  $V$  para (1) entonces  $(0, 0)$  es *estable*. Si además

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y)f(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y}(x, y)g(x, y) < 0, \quad \forall (x, y) \in D \quad (3)$$

entonces  $(0, 0)$  es *asintóticamente estable*

**Demostración.** Para la primera parte se tiene (2). Sea  $\epsilon > 0$ , y consideremos la bola abierta de centro  $(0, 0)$  y radio  $\epsilon$ ,  $B_\epsilon$ . Consideremos  $\epsilon$  pequeño de modo que  $B_\epsilon \subset D$ .

Sea  $\partial B_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\|_2 = \epsilon\}$ , la frontera de  $B_\epsilon$ . Como  $V$  es una función continua entonces alcanza un mínimo en  $\partial B_\epsilon$  (un cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^2$ ). Sea  $m$  este mínimo, es decir

$$m = \min_{(x, y) \in \partial B_\epsilon} V(x, y)$$

Como  $V$  es funcional de Liapunov entonces  $m \geq 0$ .

Por continuidad de  $V$  en  $(0, 0)$  entonces existe  $\delta > 0$  tal que

$$V(x, y) \leq \frac{m}{2}, \quad \forall (x, y) \in B_\delta \quad (4)$$

y  $B_\delta \subset B_\epsilon$  (pues  $V(0, 0) = 0$  y  $V|_{\partial B_\epsilon} \geq m$ )

Sea  $(\bar{x}, \bar{y}) \in B_\delta$ , una condición inicial para (1) en  $t = t_0$ . Por (4),

$$V(\bar{x}, \bar{y}) \leq \frac{m}{2}. \quad (5)$$

Sea  $(x(t), y(t))$  la solución (única) de (1) con esta condición inicial. Por hipótesis,  $V$  es un funcional de Liapunov, luego se tiene (2) y entonces

$$\frac{dV}{dt}(x(t), y(t)) = \left( \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{\partial V}{\partial y} g \right)(x(t), y(t)) \leq 0$$

(pues  $(x(t), y(t)) \in D$  para todo  $t \geq t_0$ ), de esta manera,  $\tilde{V}(t) = V(x(t), y(t))$  (como función de  $t$ ) es decreciente. Con lo cual

$$V(x(t), y(t)) \leq V(\bar{x}, \bar{y}) \leq \frac{m}{2}, \quad \forall t \geq t_0.$$

es decir la trayectoria  $(x(t), y(t))$  no puede intersectar  $\partial B_\epsilon$  pues sobre este conjunto  $V|_{\partial B_\epsilon} \geq m$ . Con lo cual se tiene que  $(x(t), y(t)) \in B_\epsilon$ , para todo  $t \geq t_0$ . Como esto vale para cualquier condición inicial  $(\bar{x}, \bar{y}) \in B_\delta$ , se concluye que el punto crítico es **estable**.

Demostremos ahora que si se tiene (3) entonces el punto crítico es además **asintóticamente estable**. Para ello razonemos por contradicción. Supongamos que **no** es asintóticamente estable, es decir para todo  $\epsilon > 0$  existe una trayectoria  $(x(t), y(t)) \in B_\epsilon$  tal que  $(x(t), y(t)) \not\rightarrow (0, 0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Como se tiene (3), entonces

$$\frac{dV}{dt}(x(t), y(t)) < 0,$$

es decir,  $V(x(t), y(t))$  es estrictamente decreciente, y además  $V$  es una función positiva, luego existe  $L > 0$  (pues  $(x(t), y(t))$  no converge a  $(0, 0)$ ), tal que

$$V(x(t), y(t)) \rightarrow L, \quad t \rightarrow \infty.$$

Por continuidad de  $V$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $V(x, y) < L$  para todo  $(x, y) \in B_\delta$  y  $\delta < \epsilon$ . Además, la trayectoria  $(x(t), y(t))$  va a estar contenida en el anillo  $\overline{B_\epsilon} \setminus B_\delta$ .

Ahora por continuidad de  $\frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{\partial V}{\partial y} g$  como función de  $D$  en  $\mathbb{R}$ , se tiene que alcanza un máximo negativo en  $\overline{B_\epsilon} \setminus B_\delta$ . Sea  $k$  este máximo, es decir

$$\max_{(x, y) \in \overline{B_\epsilon} \setminus B_\delta} \left( \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) f(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) g(x, y) \right) = k < 0 \quad (6)$$

Consideremos ahora la función de  $t$ ,  $\tilde{V}(t) = V(x(t), y(t))$  entonces por un teorema fundamental del cálculo

$$\tilde{V}(t) - \tilde{V}(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{d\tilde{V}}{d\tau} d\tau$$

pero por (6),  $\frac{d\tilde{V}}{dt} \leq k < 0$ , luego

$$V(x(t), y(t)) \leq V(x(t_0), y(t_0)) + k(t - t_0)$$

y como  $k < 0$  entonces cuando  $t \rightarrow \infty$  el lado derecho en la desigualdad tiende a  $-\infty$  lo que es una contradicción con  $V(x(t), y(t)) \rightarrow L > 0$ . Luego el punto crítico es **asintóticamente estable**. ■

**Observación 1** Este teorema de Liapunov no dice como encontrar el funcional  $V$ . Sin embargo, cuando el sistema (1) representa un problema físico, es natural considerar primero como un posible funcional de Liapunov a la función **energía total**. En otros casos es necesario ir probando distintos candidatos a funcionales de Liapunov.

**Ejemplo 1** Demuestre que el punto crítico  $(0, 0)$  del (SNLA) siguiente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -x(t) - x(t)y^2(t) \\ \dot{y}(t) &= -y(t) - x^2(t)y(t) \end{cases} \quad (7)$$

es asintóticamente estable. Para ello considere  $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  y encuentre valores para  $a$ ,  $b$  y  $c$  de modo que  $V$  sea funcional de Liapunov.

**Observación 2** El teorema de Poincaré y el primer teorema de Liapunov no permiten decidir sobre la estabilidad de un punto crítico de tipo **centro** en un sistema cuasi-lineal. Para decidir sobre la estabilidad de estos puntos críticos es posible usar el segundo teorema de Liapunov.

**Ejemplo 2** Estudie la estabilidad de los puntos críticos del sistema péndulo no-lineal sin roce usando como funcional de Liapunov la función energía total del sistema.