

# Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile

## MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

### Guía 2

Semestre 2004-1. Prof.: L. Baffico - Aux: A. de Laire.

#### Ejercicios de resolución de EDOs lineales de orden superior.

1. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes.

$$\begin{array}{ll}
 (a) & y'' - 16y = 0 \\
 (b) & y'' + 9y = 0 \\
 (c) & \frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0 \\
 (d) & y'' - 4y' + 5y = 0 \\
 (e) & 3y'' + 2y' + y = 0 \\
 (f) & y'' + 6y' + 9y = 0 \\
 (g) & y'' + 3y' - 5y = 0 \\
 (h) & 12y'' - 5y' - 2y = 0
 \end{array}$$

2. Resolver los siguientes problemas de valor inicial.

$$\begin{array}{lll}
 (a) & y'' + 16y = 0 & y(0) = 2 \quad y'(0) = -2 \\
 (b) & y'' + 6y' + 5y = 0 & y(0) = 0 \quad y'(0) = 3 \\
 (c) & 2y'' - 2xy' + y = 0 & y(0) = -1 \quad y'(0) = -2 \\
 (d) & y'' - 3y' + 2y = 0 & y(1) = 0 \quad y'(1) = 1 \\
 (e) & y'' - y = 0 & y(0) = 1 \quad y'(0) = 1 \\
 (f) & y'' - 8y' + 17y = 0 & y(0) = 4 \quad y'(0) = -1
 \end{array}$$

3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de variación de parámetros.

$$\begin{array}{ll}
 (a) & y'' + y = \operatorname{tg}(x) \\
 (b) & y'' + y = \operatorname{sen}(x) \\
 (c) & y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x} \\
 (d) & y'' + 3y' + 2y = 1/(1 + e^x) \\
 (e) & y'' + 3y' + 2y = 4e^x \\
 (f) & y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(x) \\
 (g) & y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{sec}(x) \\
 (h) & y'' - 4y = xe^x \\
 (i) & y'' - 2y' + y = e^x/(1 - x)^2 \\
 (j) & y'' + y = \cos^2(x)
 \end{array}$$

4. Resolver cada ecuación diferencial por el método de variación de parámetros, sujeta a las condiciones iniciales  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

$$\begin{array}{ll}
 (a) & y'' - y = xe^x \\
 (b) & 2y'' + y' - y = x + 1 \\
 (c) & y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x} \\
 (d) & y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}
 \end{array}$$

5. Sea  $y_1(x)$  una solución conocida de la Edo lineal  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ .  
**(a)** Tomando  $y_2(x) = v(x) \cdot y_1(x)$ , con  $v(x)$  una función arbitraria a determinar, demuestre que se puede encontrar otra solución  $y_2(x)$  de la ecuación anterior, y que tiene la forma:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1(x)^2} e^{-\int p(x)dx} dx$$

- (b)** Demuestre que la solución  $y_2(x)$  es l.i con  $y_1(x)$

6. Para las siguientes EDO's, verificar que  $y_1$  es solución, hallar la solución  $y_2$ , e indicar la forma de la solución general.

- (a)  $y'' + 4y' = 0, \quad y_1 = 1$
- (b)  $y'' + 16y' = 0, \quad y_1 = \cos(4x)$
- (c)  $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y_1 = e^{2x}$
- (d)  $xy'' + y' = 0, \quad y_1 = \ln(x)$
- (e)  $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0, \quad y_1 = x^4$
- (f)  $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0, \quad y_1 = x + 1$
- (g)  $x^2y'' - xy' + 2y = 0, \quad y_1 = x \operatorname{sen}(\ln(x))$
- (h)  $xy'' - (2 + x)y' = 0, \quad y_1 = 1$
- (i)  $(x^4 - x^2)y'' - (3x^3 - x)y' + 8y = 0, \quad y_1 = x^4$
- (j)  $xy'' + (2x - 1)y' - 2y = 0, \quad y_1 = e^{-2x} \quad (x > 0)$

7. Resolver cada ecuación diferencial usando el método de coeficientes indeterminados.

- (a)  $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$
- (b)  $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4\operatorname{sen}(x)$
- (c)  $y'' + 8y = 5x + 2e^{-x}$

8. Determine las soluciones homogéneas y la **forma** de la solución particular de las siguientes ecuaciones.

- (a)  $y''' + y' = 4e^{-x} + 3x\operatorname{sen}(x)$
- (b)  $y'' + 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^x\operatorname{sen}(2x) + 3e^{-x}\cos(x) + 4e^{-x}$

9. Encontrar la solución general de  $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln(x)$  con  $x > 0$ .

10. Encuentre la solución general de los siguientes problemas.

- (a)  $y^{(3)} + 3y^{(2)} + 4y^{(1)} + 2y = 0$
- (b)  $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$
- (c)  $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 4y = te^{2t} - \operatorname{sen}t$
- (d)  $y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = \cos^2t$

11. Considere la ecuación de tercer orden

$$x^{(3)} + ax^{(2)} + bx^{(1)} + cx = e^{ut}$$

donde  $a, b, c, u$  son constantes reales o complejas. Sea  $p(\lambda)$  el polinomio característico de esta ecuación. Muestre que si  $u$  es tal que  $p(u) = 0, p^{(1)}(u) \neq 0$  entonces esta ecuación tiene solución particular

$$x(t) = \frac{1}{p^{(1)}(u)}te^{ut}.$$

12. Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales.

- (a)  $y^{(3)} - 6y^{(2)} - 11y^{(1)} - 6y = e^{4t}, y(0) = y^{(1)}(0) = y^{(2)}(0) = 0$
- (b)  $3y^{(2)} + 4y^{(1)} + y = \operatorname{sen}(t)e^{-t}, y(0) = 1, y^{(1)}(0) = 0$
- (c)  $y'' + k^2y = \operatorname{sen}t, y(0) = y'(0) = 0$

13. Verifique que  $y_1 = x^{-1/2}\text{sen}x$ ,  $y_2 = x^{-1/2}\text{cos}x$  son soluciones de la ecuación homogénea asociada a

$$4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 12x^{3/2}\text{sen}x.$$

Determine la solución  $y$  de la ecuación tal que  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} x^{1/2}y = 0$  y además  $\lim_{x \rightarrow \pi} x^{1/2}y = 0$ .

### Problemas teóricos.

1. Suponga que  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones l.i. de la ecuación

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y que  $a_0$ ,  $a_1$  son funciones continuas en  $\mathbb{R}$ .

- (i) Muestre que  $y_1 - y_2$ ,  $y_1 + y_2$  son también soluciones l.i.
  - (ii) Demuestre que  $y_1$  e  $y_2$  no pueden tener un mismo punto de inflexión, a menos que  $a_0$  y  $a_1$  se anulen simultáneamente en ese punto. Ind.: en un punto de inflexión la segunda derivada se anula.
  - (iii) Pruebe que si  $a$  y  $b$  con  $a < b$  son dos ceros consecutivos de  $y_1$ , entonces existe un punto  $c \in ]a, b[$  donde  $y_2$  se anula. Ind.: Considere que el Wronskiano para  $y_1$  e  $y_2$  no cambia de signo. Use el Teorema del Valor Intermedio.
2. Sea  $f(x)$  una función impar, si se tiene que  $f(x) \in C^1] - a, a[$ ,  $f(0) = 0$  y  $f'(0) = 0$ , se pide:
- (a) Demuestre que  $W(f(x), |f(x)|) \equiv 0 \quad \forall x \in ] - a, a[$ .
  - (b) Demuestre que  $f(x)$  y  $|f(x)|$  son l.i. en  $] - a, a[$  a menos que  $f(x)$  sea idénticamente nula.
  - (c) Lo anterior, ¿le parece una contradicción? Comente.
3. Sea  $f$  una función diferenciable estrictamente positiva en un intervalo  $I$ . Muestre que  $f(x)$  y  $xf(x)$  son linealmente independientes.
4. Sea  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Considere el problema de valores frontera

$$u'' + u = f(t), \quad t \in ]0, \pi[, \quad u(0) = u(\pi) = 0. \tag{1}$$

Demuestre que (1) tiene solución si y sólo si  $\int_0^\pi f(t)\sin(t)dt = 0$

5. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{2}$$

donde  $p$  y  $q$  son funciones continuas en  $\mathbb{R}$  de período 1. Demuestre que si  $\phi(t)$  es solución de (2) tal que  $\phi(0) = \phi(1)$  y  $\phi'(0) = \phi'(1)$  entonces  $\phi$  es también periódica.

6. (a) Demuestre que

$$W(e^{k_1 x}, \dots, e^{k_n x}) = e^{(k_1 + \dots + k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ k_1 & \dots & \dots & k_n \\ k_1^2 & \dots & \dots & k_n^2 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ k_1^{n-1} & \dots & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

- (b) Demuestre que  $W(e^{k_1 x}, \dots, e^{k_n x}) = 0$  si y sólo si  $\exists k_i = k_j$  para algún  $i \neq j$

7. (C1-2000-1-Osses) *Ecuación tipo Euler*. La ecuación diferencial

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0, \quad x > 0$$

donde  $a, b$  y  $c$  son constantes reales, es llamada *ecuación de tipo Euler*. Tiene al menos una solución del tipo  $y(x) = x^\lambda$ .

- (i) Deduzca que  $\lambda$  debe satisfacer

$$a\lambda(\lambda - 1) + b\lambda + c = 0 \quad (3)$$

Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  las raíces de (3). En cada uno de los casos siguientes encuentre una base del espacio solución demostrando explícitamente la independencia lineal.

- (ii)  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales y distintas.  
 (iii)  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  y  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ,  $\beta \neq 0$  (HINT:  $x^\gamma = e^{\gamma \ln(x)}$ ).  
 (iv)  $\lambda_1 = \lambda_2 = (a - b)/(2a)$ .

8. Para  $x > 0$ , considere un operador diferencial lineal de orden  $n$  de la forma

$$P(xD) = \prod_{j=1}^n (xD - \lambda_j)$$

donde  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$  son **todos diferentes** y por definición  $(xD - \lambda_j)y = xy' - \lambda_j y$ . Nuestro propósito es resolver la EDO homogénea:

$$P(xD)y = 0, \quad \text{con } x > 0. \quad (H)$$

- (i) Demuestre que el orden de la composición en  $P(xD)$  no importa. Para ello, demuestre que

$$(xD - \lambda_i)(xD - \lambda_j)y = (xD - \lambda_j)(xD - \lambda_i)y$$

- (ii) Demuestre las propiedades de traslación siguientes:

$$(xD - \lambda)x^\beta f = x^\beta (xD - \lambda + \beta)f \quad (PT1)$$

y en particular

$$(xD - \lambda)x^\beta = (\beta - \lambda)x^\beta \quad (PT2)$$

- (iii) A partir de lo anterior demuestre que  $x^{\lambda_j}$  es solución de (H) para  $j = 1, \dots, n$ .
- (iv) Demuestre ahora que  $\{x^{\lambda_1}, \dots, x^{\lambda_n}\}$  es un conjunto de funciones linealmente independientes. Puede usar determinantes o comportamiento en el infinito. En caso de usar determinantes, sacando factores apropiados, use que el determinante siguiente es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1(\lambda_1 - 1) \dots (\lambda_1 - (n - 2)) & \dots & \lambda_n(\lambda_n - 1) \dots (\lambda_n - (n - 2)) \end{vmatrix} \neq 0$$

- (v) Demuestre que  $\langle x^{\lambda_1}, \dots, x^{\lambda_n} \rangle$  genera el espacio solución de (H). Deduzca que (H) tiene como solución

$$y_h(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2} + \dots + c_n x^{\lambda_n} \quad \text{para } x > 0$$

donde  $c_j, j = 1, \dots, n$  son constantes reales.

- (vi) Usando sucesivamente las propiedades de traslación (PT1) y (PT2), resuelva la ecuación no homogénea siguiente:

$$(xD - 3)(xD - 4)(xD - 5)(x^2 y) = x^{3/2}, \quad \text{con } x > 0.$$

9. Sean  $a$  y  $g$  funciones continuas en  $[-1, 1]$ . Considere la ecuación

$$y'' + a(t)y = g(t), \quad t \in [-1, 1]$$

Demuestre que si  $a(t)$  es par,  $g(t)$  es impar, e  $y(t)$  es una solución de esta ecuación con  $y(0) = 0$ , entonces  $y(t)$  es impar. *Hint:* Recuerde que una función  $f(t)$  se dice par si  $f(t) = f(-t)$ , e impar si  $f(t) = -f(-t)$ .

10. Sean  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $g(t)$  funciones continuas en un intervalo  $I = ]a, b[$ ,  $t_0 \in I$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad t \in I, \quad y(t_0) = \alpha, \quad y'(t_0) = \beta. \quad (4)$$

En este problema se le pide demostrar que (4) posee a lo más una solución  $y(t)$  definida en  $I$ , esto es, la afirmación de unicidad en el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones de segundo orden lineales. Sean  $y_1, y_2$  dos soluciones del problema,  $h = y_1 - y_2$

- (a) Sea  $\phi(t) = |h(t)| + |h'(t)|$ . Demuestre que hay una función  $w(t)$  continua y positiva en  $I$  tal que

$$\phi(t) \leq \left| \int_{t_0}^t w(s)\phi(s)ds \right| \quad \text{para todo } t \in I. \quad (5)$$

- (b) Deduzca de la desigualdad (5) el resultado deseado. Para ello, defina  $b(t)$  igual al lado derecho de (4), y  $c(t) = b(t)e^{-|\int_{t_0}^t w(s)ds|}$ , verifique que  $c(t)$  es decreciente y concluya usando la positividad de  $\phi(t)$ .

11. Considere  $u$  y  $v$  soluciones positivas de

$$u'' + a(t)u = 0 \quad (6)$$

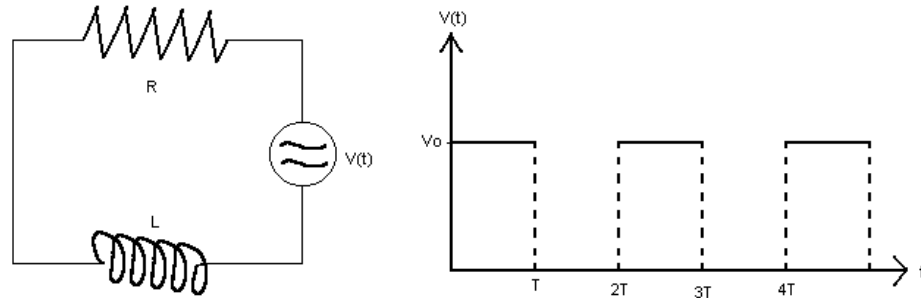
$$v'' + b(t)v = 0 \quad (7)$$

respectivamente, donde  $a(t) > b(t)$ ,  $\forall t > 0$ . Suponga que  $u(0) = v(0)$  y  $u'(0) = v'(0)$ . Muestre que  $u(t) < v(t)$ ,  $\forall t > 0$ .

### Problemas de Modelamiento:

1. (C2-2001-2-Alvarez) *Onda cuadrada y dosis de glucosa.*

- (a) Determine la corriente eléctrica en función del tiempo en un circuito en serie compuesto por una inductancia  $L$ , una resistencia  $R$  y una fuente de voltaje del tipo *onda cuadrada* de amplitud  $V_0$  y período  $2T$  (ver figura). Asuma que inicialmente la corriente eléctrica es nula.



- (b) La desviación  $g(t)$  de la concentración de glucosa desde su nivel base  $N_b$  en un cuerpo humano puede modelarse por la EDO

$$\ddot{g} + 2\alpha\dot{g} + w_0^2 g = 0$$

donde  $\alpha > 0$ ,  $w_0 > 0$  y  $g(0) = 0$ ,  $\dot{g}(0) = \beta$  donde  $\beta$  es la tasa inicial (desconocida) de variación de glucosa.

- (b.1) Determine  $g(t)$  en términos de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $w = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2}$  (considere el caso  $w_0 > \alpha$ ).  
(b.2) Suponga que un paciente llega a un hospital con nivel base de glucosa igual a  $0,7[mg/cm^3]$  y entonces se le suministra una fuerte dosis de glucosa. Al cabo de 1 hora, 2 horas y 3 horas se miden niveles de 1; 0,55 y  $0,75[mg/cm^3]$  respectivamente.

Verifique que si  $\gamma = \sin(w)$ , entonces necesariamente  $\gamma = \pm 1/2$ .

(b.3) (0,5 pts) Bajo las condiciones de (b.2), pruebe que para ese paciente se tiene  $w = 5\pi/6$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}\ln(12)$  y  $\beta = \pi\sqrt{3}$

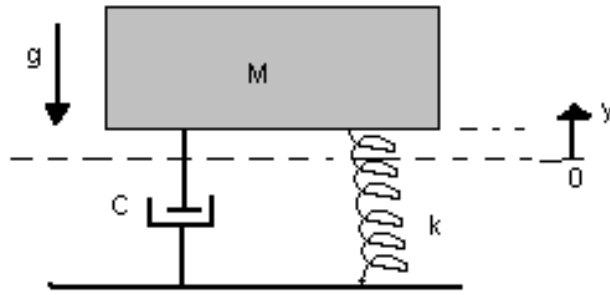
(b.4) (0,5 pts) Se sabe que los pacientes **no-diabéticos** tienen valores de  $w_0$  (que corresponde a la frecuencia de oscilaciones no-amortiguadas) de período máximo  $4[hrs]$ , mientras que los diversos grados de diabetes se atribuyen a pacientes con períodos mayores a  $4[hrs]$ .

Con la información anterior clasifique al paciente de (b.2).

2. *Oscilador.* El oscilador amortiguado que se muestra en la figura, se suelta a una altura “ $y_0$ ” sobre la posición de equilibrio del resorte (sin la acción de la masa M) con velocidad nula. Si  $c$  es la constante de amortiguamiento del amortiguador, y  $k$  es la rigidez del resorte, de la segunda ley de Newton se puede deducir que la ecuación diferencial que rige el movimiento vertical de la masa M es

$$-cy' - ky - mg = my''$$

Encuentre la función que describe el movimiento de la masa M y grafique dicha función.



3. (ExRec-2001-01-Osses) Considere el sistema de dos estanques de igual sección transversal  $S$ , unidos por una tubería de sección  $A$  y largo  $L$  (ver figura). Inicialmente el nivel de los estanques es el mismo y el sistema está en equilibrio. En el instante  $t = 0$  comienza a descargarse en el estanque de la derecha un caudal  $Q(t) = \alpha t$ , con  $\alpha > 0$  constante. La ecuación diferencial que modela el sistema antes descrito cuando el flujo que circula por la cañería es laminar es:

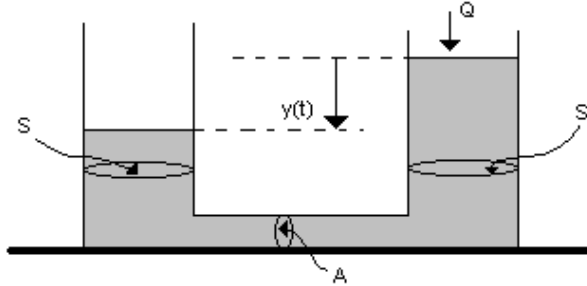
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + by = c + act \quad \forall t \geq 0$$

$$y(0) = 0 \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

Donde  $y(t)$  es la diferencia de nivel de los estanques en el instante,  $a = \frac{32\nu}{D^2} > 0$ ,  $b = \frac{2Ag}{SL} > 0$ ,  $c = \frac{\alpha}{S} > 0$ , con  $\nu$  = viscosidad cinemática del fluido.

- (i) Encuentre  $y(t)$  cuando no existen pérdidas friccionales en el sistema (ie, cuando  $a = 0$ , ya que  $\nu = 0$ ).

- (ii) Encuentre la solución general  $y(t)$  cuando  $a \neq 0$ , analizando separadamente los casos  $a^2 = 4b$ ,  $a^2 > 4b$  y  $a^2 < 4b$ . Esquematice gráficamente la solución en cada caso en función de  $t$ .



4. (C1-2001-1-Osses) *Represa*. Motivados por los movimientos de un líquido que ocurren en la chimenea de una represa al cerrar una válvula (ver figura), estudiaremos el modelo simplificado del movimiento de un líquido incompresible en un tubo en U (ver Fig.2).

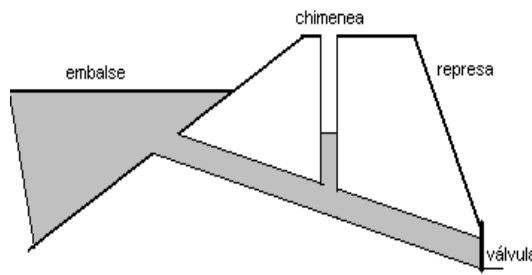


Fig. 1

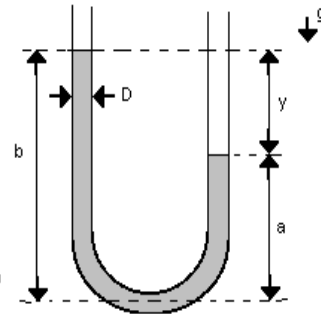


Fig. 2

La diferencia de altura  $y$  entre los extremos de la columna de líquido en forma de U, de diámetro  $D > 0$ , largo  $L > 0$  y viscosidad  $\nu \geq 0$  sujeta a una aceleración de gravedad  $g \geq 0$ , satisface:

$$y'' + ky' + wy = 0, \quad t \geq 0, \quad k = \frac{32\nu}{D^2}, w = \frac{2g}{L}.$$

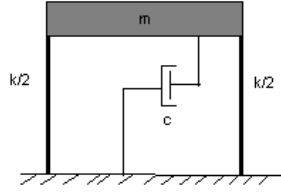
Inicialmente  $y(0) = b - a < \frac{L}{4}$ ,  $y'(0) = -v_0$ ,  $v_0 > 0$  (ver Fig.2).

- (i) Resuelva la ecuación con condiciones iniciales si  $\nu = 0$  (ie, no hay fricción).
- (ii) Si ahora  $\nu \neq 0$ , resuelva la ecuación con condiciones iniciales en los casos  $k^2 > 4w$ ,  $k^2 = 4w$ ,  $k^2 < 4w$ , discuta cualitativamente (graficando) las soluciones y dé una interpretación física haciendo uso de una analogía mecánica.
- (iii) En el caso  $k^2 < 4w$ , encuentre una condición sobre  $v_0$  en función de los parámetros del problema para evitar un rebalse, esto es:

$$|y(t)| \leq \frac{L}{4}$$



5. *Determinación de las propiedades dinámicas de una estructura de un grado de libertad (1 GDL).* Consideremos el siguiente modelo de una estructura de 1 GDL (una viga infinitamente rígida sustentada por dos columnas de rigidez horizontal  $k/2$  cada una):



Haciendo un diagrama de cuerpo libre de la viga y utilizando la ecuación de equilibrio dinámico, se obtiene que la ecuación diferencial que rige el movimiento horizontal de la viga es:

$$u''(t) + 2\beta\omega_n u'(t) + \omega_n^2 u(t) = 0, \quad 2\beta\omega_n = \frac{c}{m}, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

donde :  $c$ =Constante de amortiguamiento,  $m$ =masa de la viga (concentrada en el centro de gravedad),  $k$ =rigidez horizontal total del sistema,  $\omega_n$ =frecuencia natural con que vibra la estructura,  $\omega_A$ =frecuencia amortiguada de la estructura,  $\beta$ =razón de amortiguamiento crítico.

- (a) Encuentre la ecuación que describe el movimiento horizontal de la viga dadas las condiciones iniciales  $u(t = 0) = U_0$  y  $u'(t = 0) = U'_0$ . (**Ind.:** empíricamente se sabe que para estructuras reales  $0 < \beta < 1$ ).
- (b) Prueba de Pullback: mediante algún método mecánico, se induce una deformación inicial estática  $U_0$  sobre la estructura. Luego se libera a la estructura (del reposo), y se deja oscilar al sistema antes descrito registrándose la amplitud de las oscilaciones en un instrumento. Con la solución de la ecuación diferencial que rige el movimiento de la estructura se puede determinar la razón amortiguamiento crítico  $\beta$  y la frecuencia natural de las oscilaciones  $\omega_n$  usando los registros obtenidos. Para calcular  $\beta$ , pruebe haciendo el cociente entre dos máximos sucesivos de la amplitud de las oscilaciones y obtenga una relación que permita obtener dicho coeficiente. Una vez que se obtiene  $\beta$  se puede obtener la frecuencia amortiguada  $\omega_A = \omega_n \sqrt{1 - \beta^2}$  midiendo el período amortiguado de la estructura  $T_A$ , de donde se tiene que  $\omega_A = \frac{2\pi}{T_A}$ .
- (c) Vibrador Dinámico Estructural: El vibrador estructural consiste en dos masas  $m_0$  las cuales rotan con velocidad angular  $w$  en torno a dos ejes  $O'$  y  $O$  pero en direcciones contrarias y en fase, de tal manera que la proyección de las fuerzas centrífugas según  $\hat{y}$  (eje perpendicular a esta hoja) sean nulas y según  $\hat{x}$  (eje horizontal, paralelo a esta hoja) es  $F(t) = 2m_0 w^2 r \cos(wt)$ , es decir en esta dirección se tiene una fuerza armónica. Con lo anterior se tiene que la Edo que modela el sistema cuando está actuando el vibrador es:

$$u''(t) + 2\beta\omega_n u'(t) + \omega_n^2 u(t) = F(t) = 2m_0 w^2 r \cos(wt)$$

Resolver la ecuación diferencial que modela el movimiento de la estructura y proponer un método (usando mediciones experimentales de la amplitud de las oscilaciones de la estructura para una frecuencia de excitación dada) para deducir la frecuencia natural de oscilación de la estructura en cuestión. *Hint:* Aquí debe usar conceptos como el fenómeno de resonancia.

6. *Temperatura barra infinita.* La ecuación que modela la temperatura  $T$  en una barra infinita es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad x \in ]-\infty, \infty[ \quad t \geq 0.$$

La idea de este problema es demostrar que la temperatura  $T(x, t)$  tiende a cero en todo punto de la barra cuando  $t \rightarrow \infty$ , al menos en el caso particular en que  $T(x, t) = f(x)g(t)$ , donde  $f$  y  $g$  son funciones de una variable a determinar.

- (i) Escriba la ecuación diferencial parcial en función de  $f$ , de  $g$  y sus derivadas.
  - (ii) Observe que si  $A(X) = B(t) \quad \forall x, t$  entonces  $\exists k \in \mathbb{R}$  tal que  $A = B = k$ . Use esto para encontrar EDO's para  $f$  y  $g$  separadamente en función del parámetro  $k$ .
  - (iii) Considere el caso  $k = -\alpha^2, \alpha > 0$  y resuelva las ecuaciones del punto (ii) para  $f$  y para  $g$ .
7. Considere la EDO de segundo orden homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (8)$$

- (a) Haciendo  $y(x) = u(x)v(x)$  en (8) y anulando el coeficiente de  $u'$  que aparece, determine  $v$  (compruebe que  $v > 0$ ) y deduzca que (8) equivale a

$$u'' + r(x)u = 0 \quad (9)$$

donde  $r(x) = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p'$ . Decimos que (9) es la forma normal de (8).

- (b) Considere la ecuación de Schrodinger en una dimensión

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \left(k + \frac{2}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)y = 0 \quad (10)$$

donde  $k$  y  $l$  son números naturales. Sabiendo que la solución de 9 puede oscilar sólo si  $r(x) > 0$ , encuentre una condición para que pueda haber oscilaciones de los electrones del átomo de hidrógeno descritos por (10)