

Auxiliares 11 a 13

A) Sistemas Lineales y Diagonalización $S+N$

Se tiene que una matriz A , con ~~valores~~ ^{valores} propios

$\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_p$ y polinomio ~~característico~~ ^{característico}

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p} \quad m_i: \text{multiplicidad}$$

Entonces:

- La matriz A cumple con el polinomio;
i.e. $(A - \lambda_1 I)^{m_1} \dots (A - \lambda_p I)^{m_p} = 0$
- Posee Diagonalización $A = S + N$ con S diagonalizable y N nilpotente, i.e. $N^{\max(m_i)} = 0$.

$$S_N = N_S$$

$$e^{At} = e^{(S+N)t} = e^{St} e^{Nt}$$

$$e^{Nt} = \sum_{i=0}^{\max(m_i)} \frac{N^i \cdot t^i}{i!}$$

¿Cómo obtenemos S y N ?

- Se obtienen los V.P. de A , digamos $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ con multiplicidad m_1, \dots, m_p .

Resolvemos: $(A - \lambda_i I)^{m_i} = 0$

a) Si $\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Se obtienen m_i vectores propios dados por $V_i^1, \dots, V_i^{m_i}$ directamente de $(A - \lambda_i I)^{m_i} = 0$.

b) Si $\lambda_i \in \mathbb{C}$. consideramos solo el λ_i con parte ~~real~~ ^{imaginaria} positiva (puesto que también está el conjugado) y resolvemos $(A - \lambda_i I)^{m_i} = 0$. Esto nos entrega $V_i^1, \dots, V_i^{m_i}$ vectores propios complejos y luego obtenemos los vectores reales así:

$$\text{Im}(V_i^1) = \tilde{V}_i^1; \dots; \text{Im}(V_i^{m_i}) = \tilde{V}_i^{m_i-1}$$

$$\text{Re}(V_i^1) = \tilde{V}_i^2; \dots; \text{Re}(V_i^{m_i}) = \tilde{V}_i^{m_i}$$

(Se debe seguir este orden)

Por favor notar que \tilde{V}_i No es $V_i \cdot \tilde{V}_i: V_i \dots$ sino solo una notación.

Así; escribimos una matriz S como:

$$S' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \begin{bmatrix} a_i - bi & \\ bi & a_i \end{bmatrix} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

m veces

Esto significa que S' es una matriz diagonal por bloques con:

- Si $\lambda_i \in \mathbb{R}$, entonces es λ_i con multiplicidad (repetido m_i veces)
- Si $\lambda_i \in \mathbb{C}$, entonces es $\lambda_i = a_i + bi$

✓ utilizamos la matriz de vectores propios la cual corresponde a la ~~transformación~~ inversa de P

bloque $\begin{bmatrix} a_i & -bi \\ bi & a_i \end{bmatrix}$ repetido $2m_i$ veces.

$$P^{-1} = \left[\underbrace{v_1^1 | \dots | v_1^{m_1}}_{\text{Reales}} \dots \underbrace{v_i^1 | \dots | v_i^{2m_i}}_{\text{Complejos}} \dots \right]$$

Así: $S = P^{-1} S' P$ y $N = A - S$

\Rightarrow Si $x'(t) = A(t)x(t) \Rightarrow x(t) = e^{\int A(t) dt} x(t_0) = e^{\int A(t) dt} x(t_0)$

[B] Sistemas no lineales, cuasi lineales, plano fase, etc.

Se le llama Sistema no lineal a un sistema de EDO's de la forma:

$$(SNL) \begin{cases} x' = f_1(x, y, t) \\ y' = f_2(x, y, t) \end{cases}$$

es autónomo si ni f_1 ni f_2 dependen de t , i.e.:

$$(SNLA) \begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases}$$

A un sistema se le dice "cuasi lineal" si se al buscar los "puntos críticos", éstos son aislados: ~~totalmente~~

• Punto crítico: punto donde ambas derivadas (x', y') se anulan simultáneamente:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \text{ pto crítico} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ f_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases}$$

Sea P el conjunto de los puntos críticos, i.e.

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / f_1(x, y) = 0 \wedge f_2(x, y) = 0 \}$$

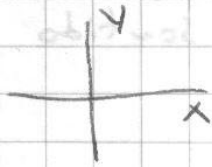
Entonces, un punto crítico es aislado si

$$\exists \delta > 0 \forall (x, y) \in S \text{ tal que } \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| > \delta \wedge (\bar{x}, \bar{y}) \in S$$

o sea, no hay 2 puntos críticos "juntos"

Lo que nosotros deseamos hacer con los sistemas no lineales es analizar como se comportan las soluciones en términos una de la otra.

∴ El "Plano Fase" corresponde a los ejes x e y :



Y poseemos varios teoremas en términos de dos puntos críticos:

∴ El método para analizar es: Sea $x' = f_1(x, y)$
 $y' = f_2(x, y)$

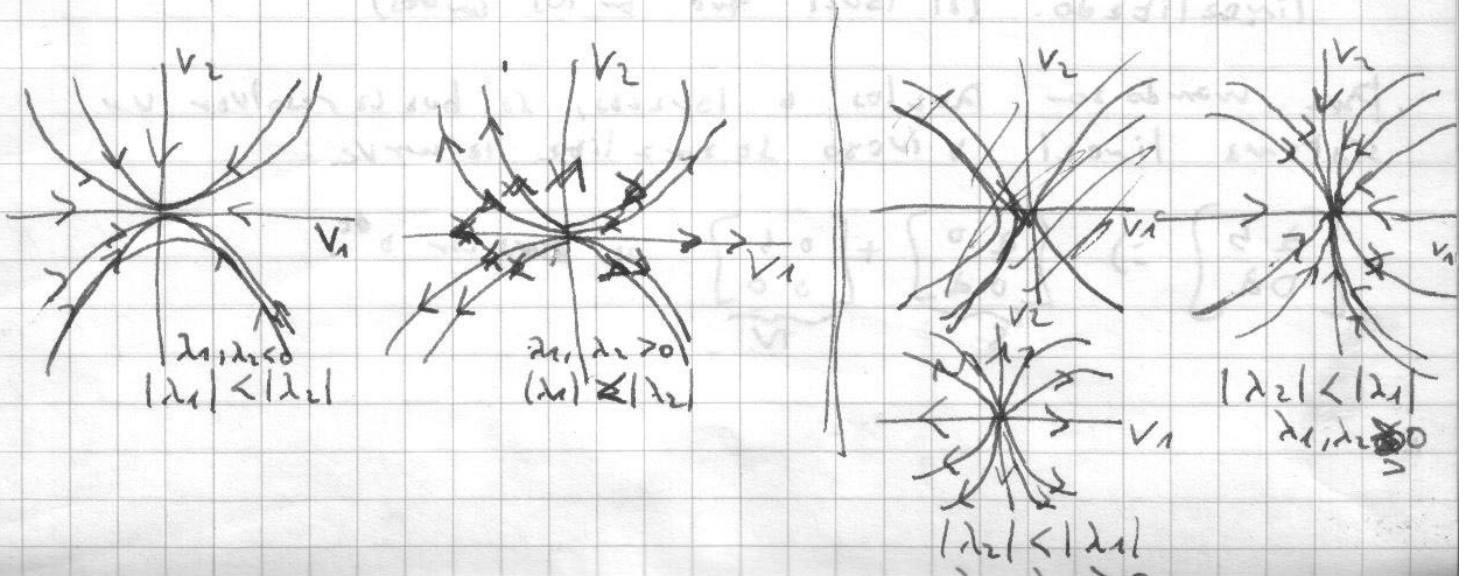
- 1) Se buscan los puntos críticos \Rightarrow Verificar
 sistema no lineal $f_1(x, y) = 0$
 $f_2(x, y) = 0$.

y calcular $J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx}(x, y) & \frac{df_1}{dy}(x, y) \\ \frac{df_2}{dx}(x, y) & \frac{df_2}{dy}(x, y) \end{bmatrix}$

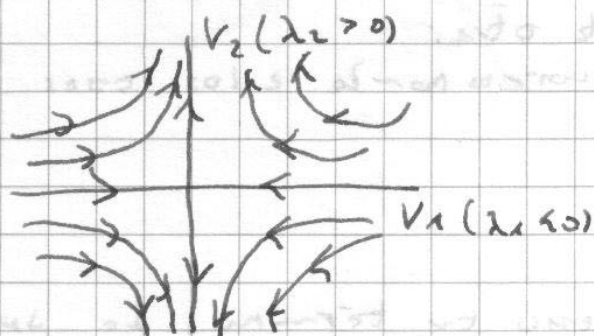
- 2) Se evalúa el Jacobiano (J) en C/U de los puntos críticos y se analiza de acuerdo a los valores propios:
 Sean λ_1, λ_2 val. Propios

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; ~~$\lambda_1 \neq \lambda_2$~~ $\lambda_1 \neq \lambda_2$; del mismo signo
 En este caso se tienen soluciones ~~estables~~ ~~inestables~~
 Si $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ las trayectorias son ts al vector propio asociado a v_1 ; si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$; las trayectorias son tangentes a v_2 :

Si son estables o inestables va a depender del signo: si es < 0 ; son ~~estables~~ estables. Si no, son inestables.



- λ_1, λ_2 : $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 > 0$ (el otro caso es simétrico).
Se buscan V_1 (asociado a λ_1) y V_2 (asociado a λ_2) y da:

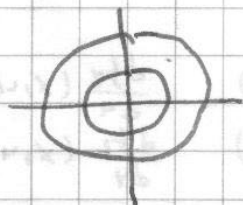


(las flechas siguen el sentido)

A los puntos se les dice "punto silla"

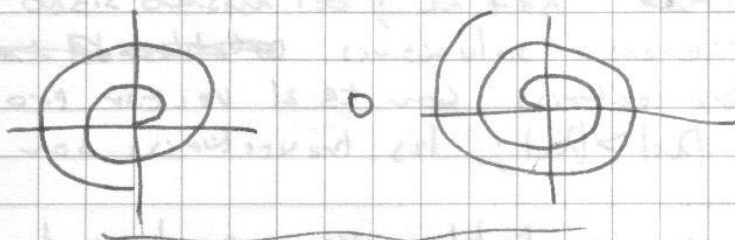
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (complejos conjugados) ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

a) Si $\text{Re}(\lambda) = 0$, entonces tenemos centros:



El sentido del tiempo se analiza con la ~~matriz~~ matriz Jacobiana (viendo los signos de la derivada en el sistema ~~de ecuaciones~~ linealizado)

b) $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ se tienen espirales:



Si $\text{Re}(\lambda) > 0$ el tiempo sale del espiral.

Si $\text{Re}(\lambda) < 0$ el tiempo entra en el espiral

el sentido del giro se nota analizando el sistema linealizado. (al igual que en los centros)

Pero cuando son reales e iguales, se busca resolver un sistema lineal y luego se analiza la curva:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}}_S + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_N \text{ y buscar } 0^{\text{ta}}.$$

• Teorema de Ljapunov:

Otra forma de analizar estabilidad de Sistemas Lineales es con las "funciones de Ljapunov":

Teorema:

Sea ~~el~~ sistema lineal:

$$(1) \quad X' = F(x) \quad \text{con} \quad X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad x_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad \text{Definido en un conjunto } W \subseteq \mathbb{R}^n$$

Sea \bar{x} un pto crítico de (1) ($F(\bar{x}) = 0$).

Sea $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ Función, $U \subset W$,

V derivable en:

• $V(\bar{x}) = 0$ y $V(x) > 0$ en $U \setminus \{\bar{x}\}$

si:

1) $\frac{dV}{dt}(x) \leq 0$ en $U \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow \bar{x}$ es estable

2) $\frac{dV}{dt}(x) < 0$ en $U \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow \bar{x}$ es Asintóticamente Estable.

Obs: • Para sistemas físicos; $V(x)$ es comúnmente la energía.

• Para Sistemas en General: $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ (o bl no de variables que sean) puede ser una, imponiendo las condiciones sobre a, b, c, \dots que sean necesarias.

• Plano Velocidad - Posición:

Para sistemas físicos, donde se nos da una función del tipo $F = m \cdot \ddot{x}$

o $\ddot{x} = f(x)$ tomando:

$$\left. \begin{array}{l} x' = y \\ y' = f(x) \end{array} \right\} \text{ Plano Velocidad - Posición}$$

Se pueden trazar los sistemas físicos (Hamiltonianos) en el plano fase.



Se analiza Vel v/s posición.

Problemas:

P1) Resolver:

$$\dot{x} = Ax \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Necesitamos P^A ; ~~que~~ busquemos autovalores $\det(A - \lambda I)$
Como la matriz es Δ sup. autovalores es la multiplicación
de la diagonal:

$$(-1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \quad m_1 = 2$$

$$\lambda = 2 \quad m_2 = 1$$

Buscamos autovalores ~~de~~ ~~(A + I)~~ diagonalizables
 $T = S + N$.

Veamos los vectores propios:

• $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} -3v_1 + v_2 &= 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \\ -3v_2 &= 0 \Rightarrow v_2 = 0 \\ v_3 &\text{ libre} \end{aligned}$$

$$\therefore V_p(\lambda=2): \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $\lambda = -1$: Ahora usamos el hecho que como A cumple
con el polinomio característico:

$$(A - (-1)I)^2 = 0 \Rightarrow (A + I)^2 = 0 \quad \text{y así buscamos}$$

los v.p.: (tomamos $(A + I)^2 V = 0$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} v_1 \text{ y } v_2 &\text{ libres} \\ v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore V_{p1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_{p2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \quad (n=2)$$

Para los V.P. tomamos en cuenta sólo la parte positiva:

Debemos buscar $(A - iI)^2 V = 0 \quad V \in \mathbb{C}^4$ (Valor complejo)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2i & 0 & 0 \\ -2i & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2i \\ -4i & -2 & -2i & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -2v_1 + 2iv_2 &= 0 \\ -2iv_1 - 2v_2 &= 0 \\ -2v_1 - 2v_3 + 2iv_4 &= 0 \\ -4v_1 - 2v_2 - 2iv_3 - 2v_4 &= 0 \end{aligned}$$

De estas 4 ecc. sólo 2 son l.i. y hay 2 parámetros libres. De aquí obtenemos:

$$z_1 = iv_4 - z_3$$

$$z_1 = iz_2$$

$$\therefore \begin{pmatrix} iz_4 - z_3 \\ z_4 + iz_3 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = z_3 \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_4 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así: } \tilde{V}_1 = \text{Im}(V_1) = (0, 1, 0, 0)^T$$

$$\tilde{V}_2 = \text{Re}(V_1) = (-1, 0, 1, 0)^T$$

$$\tilde{V}_3 = \text{Im}(V_2) = (1, 0, 0, 0)^T$$

$$\tilde{V}_4 = \text{Re}(V_2) = (0, 1, 0, 1)^T$$

$$\therefore P^{-1} = [\tilde{V}_1 | \tilde{V}_2 | \tilde{V}_3 | \tilde{V}_4] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

\leadsto Pues $\lambda = 0 + 1 \cdot i$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

$$S = P^{-1} S' P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[v_1 | v_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\therefore S' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Aquí se ve que $\lambda = -1$ es con $m=2$. \therefore Aparece 2 veces. Además se debe respetar el orden de los vectores propios en S' (o sea; como nosotros primero los vectores asociados a $\lambda = -1$, y en 1º los $\lambda = -1$ en S').

$$\therefore S = P^{-1} S' P = S' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore N = A - S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilpotente de orden = $\max\{m\}$ en este caso 2.
 $\therefore N^2 = 0$ (comprobalo)

$$\therefore e^{St} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}; e^{Nt} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Nt)^i}{i!} = I + \frac{Nt}{1} + \frac{N^2 t^2}{2} + \dots \rightarrow 0$$

$$\therefore e^{Nt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & t e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} //$$

$$\therefore X(t) = e^{At-t_0} \cdot X(t_0) \text{ o } X(t) = e^{At} \vec{c} \quad \vec{c} \in \mathbb{R}^n.$$

p2 Resolver $\dot{X} = AX$

$$\text{con } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Busquemos $\det(A - \lambda I)$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left[-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-\lambda - 1) \right] = 0$$

$$N = A - S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leadsto N: \text{potente de orden 2: } N^2 = 0$$

Ahí está; ahora $e^{At} = e^{St} \cdot e^{Nt}$

$$e^{St} = P^{-1} \cdot e^{S't} \cdot P = P^{-1} \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} P$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$e^{Nt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahí $e^{At} = e^{St} \cdot e^{Nt}$ //

P2) Analizar el sistema no lineal

$$\dot{X} = -2x(x-1)(2x-1) \quad (\text{notar que es posible resolver la expresión})$$

$$\dot{Y} = -2Y$$

1) Puntos críticos: $-2x(x-1)(2x-1) = 0 \Rightarrow X=0, Y=0$
 $-2Y = 0 \Rightarrow Y=0$
 $\Rightarrow X=1, Y=0 \vee X=1/2, Y=0$

$\therefore (0,0); (1,0); (1/2,0)$

Veamos el Jacobiano:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} -2(6x^2 - 6x + 1) & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\therefore J(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ es diag. por lo tanto podemos decir $\tilde{X}(t) = e^{-t}$ y $\tilde{Y}(t) = e^{-2t}$
 (de el hecho que $\tilde{X}'(t) = J(0,0) \tilde{X}(t)$)
 entorno a $(0,0)$

Así: $\frac{Y'(t)}{X'(t)} = 1 \Rightarrow \frac{dY}{dX} = 1 \Rightarrow Y = X$

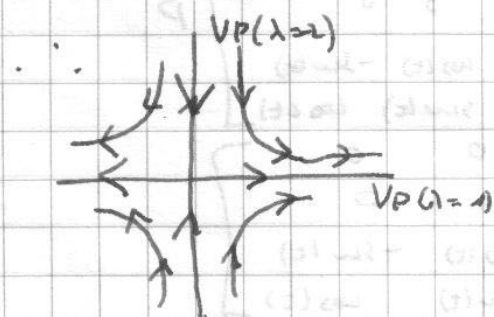
\Rightarrow



Se ve este blos pues es real y por lo tanto es real neg.

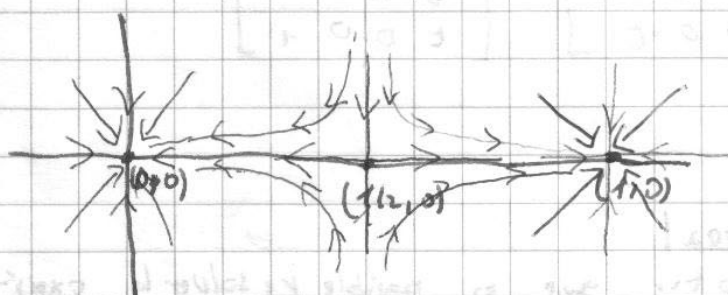
$$J(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

\therefore Pto silla $(\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -2)$
 $V_p(\lambda = 1): \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V_p(\lambda = -2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$J(1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{Se repite el de } (0,0)$$

\therefore Diagrama total:



P2 Analizar

~~$\dot{x} = 5x^3 - x^5 - 4x$~~ $\dot{x} = 5x^3 - x^5 - 4x$, un resorte sometido a roce viscoso de 5 y 3 orden.

Cambiamos $x' = u$
 $u' = 5x^3 - x^5 - 4x$

Y analizamos el plano fase: Ptos críticos cuando

$u = 0 \Rightarrow y = 0, x = 0$
 $x(5x^2 - x^4 - 4) = 0 \Rightarrow y = 0; x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$

$\therefore x^2 = \frac{5 \pm 3}{2} = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \therefore (-2, 0); (-1, 0); (0, 0);$
 $x = \pm 1 \quad (1, 0); (2, 0)$

son los pto. críticos.

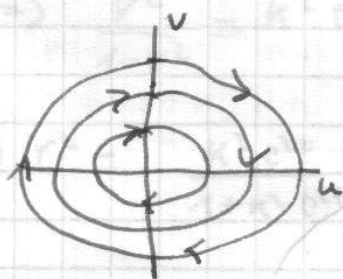
~~$J(0,0)$~~ $J(x, u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15x^2 - 5x^4 - 4 & 0 \end{bmatrix}$

$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

Así: ~~$\begin{bmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$~~ $\begin{bmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore 2iv_1 = -v_2$ tomamos $v_1 = 1$
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Así, tomamos Parte real e Imaginaria y tenemos $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Como V.P. Junto con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pueden ser imaginarios puros:



Para la rotación (sentido)
Miramos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} u' &= v \\ v' &= -4u \end{aligned}$$

\therefore Si $u > 0 \Rightarrow v' < 0 \Rightarrow v$ decrece

Si $v > 0 \Rightarrow u' > 0 \Rightarrow u$ crece

Así notamos, que la rotación es en el sentido horario.

$$\cdot J(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{6} \text{ (pts silla)}$$

$$\lambda = \sqrt{6}: \begin{bmatrix} -\sqrt{6} & 1 \\ 6 & -\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -V_1\sqrt{6} + V_2 &= 0 \\ \Rightarrow V_2 &= V_1\sqrt{6} \end{aligned}$$

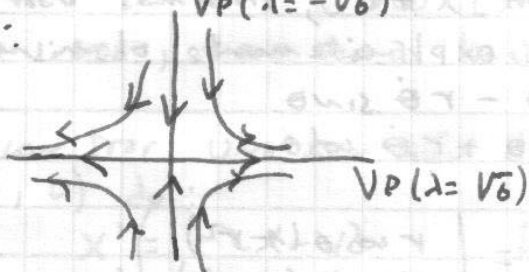
$$\Rightarrow \text{Si } V_1 = 1 \quad V_2 = \sqrt{6} \\ \therefore \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = V_p(\lambda = \sqrt{6})$$

$$\lambda = -\sqrt{6}: \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 1 \\ 6 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \sqrt{6}V_1 + V_2 &= 0 \\ V_2 &= -V_1\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$(A + \sqrt{6}I)V = 0$$

$$V_p(\lambda = -\sqrt{6})$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} = V_p(\lambda = -\sqrt{6})$$



* Aquí no equivocas en la auxiliar

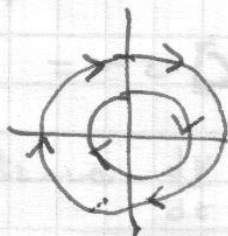
$$\cdot J(2,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -24 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -24 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 24 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i\sqrt{6}$$

\therefore Movimientos son centros y el igual que la vez pasada:

$$u' = v$$

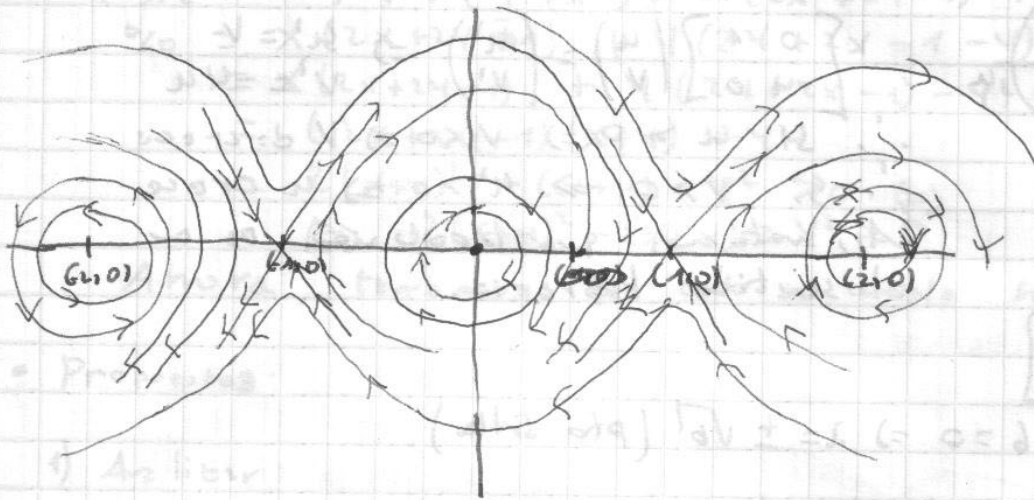
$$v' = -24u$$

\Rightarrow rotación sentido horario.



Faltan los puntos $(-2,0)$ y $(-1,0)$, pero el jacobiano es simétrico por lo que no es necesario analizarlos, pues corresponden a los mismos casos anteriores

Diz gr2 me tot2l :-



PJ] Analizar:

$$x' = x(1 - x^2 - y^2)$$

$$y' = y(1 - x^2 - y^2)$$

Si anulamos x o y nos queda que $(0,0)$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ son pts críticos. \therefore no es cuasilineal el sistema.

Pero dado que está el factor $x^2 + y^2$; podemos usar coord. polares para resolver explícitamente el mismo:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \Rightarrow x' = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ y &= r \sin \theta \Rightarrow y' = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta (1 - r^2) \\ r \sin \theta (1 - r^2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta (1 - r^2) \\ r \sin \theta (1 - r^2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1 - r^2) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \theta(t) = \theta_0(t_0)$$

$$\dot{r} = r(1 - r^2) \Rightarrow \int \frac{dr}{r(1 - r^2)} = t + C$$

\Rightarrow Usando fracciones parciales:

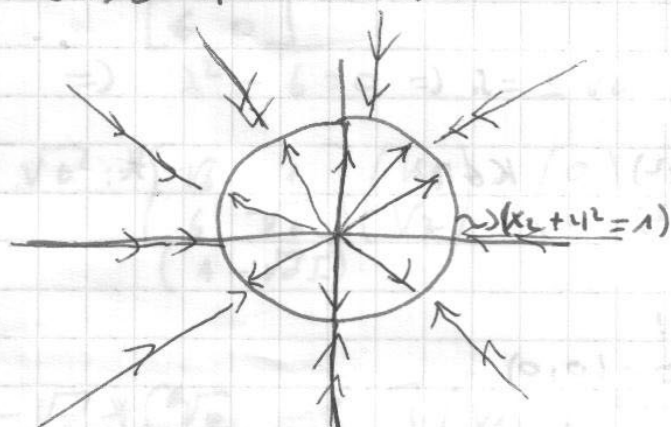
$$\int \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{2(1-r)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+r} \right] dr = t + C$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{1-r^2} = k^2 e^{2t} \Rightarrow r^2(1+k^2 e^{2t}) = k^2 e^{2t}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{k^2 e^{2t}}{1+k^2 e^{2t}} = \frac{1}{C_1 e^{-2t} + 1} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{C_1 e^{-2t} + 1}}$$

$$\text{Así: } x(t) = \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{C_1 e^{-2t} + 1}} \quad y(t) = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{C_1 e^{-2t} + 1}}$$

\therefore ~~Q(x)~~ Análisis:



- Si $C_1 > 0$
 $\Rightarrow t \rightarrow \infty (x(t), y(t)) \rightarrow (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$
 $t \rightarrow 0 (x(t), y(t)) \rightarrow \left(\frac{\cos \theta_0}{\sqrt{1+C_1}}, \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{1+C_1}} \right)$

Se queda dentro del círculo y nos movemos de 0 a 1.

- Si $C_1 < 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 (x(t), y(t)) \rightarrow 0$
 $t \rightarrow \infty (x(t), y(t)) \rightarrow (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$
 o sea, nos vamos hacia 1 //

P6 Encontrar una función de Lyapunov estricta para $(0, 0)$ de:

$$\begin{aligned} x' &= -2x - y^2 \\ y' &= -y - x^2 \end{aligned} \quad \text{Hallar } \delta > 0 \text{ tq se cumple.}$$

Busquemos:

$$V(x, y) = ax^2 + by^2 \Rightarrow \text{wumpo con } V(0, 0) = 0$$

y si $a > 0, b > 0$ wumpo con $V(x, y) > 0$ fuera de $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(x, y) &= 2ax \cdot x' + 2by \cdot y' = 2ax(-2x - y^2) + 2by(-y - x^2) \\ &= -2[ax(2x + y^2) + by(y + x^2)] \end{aligned}$$

$$\text{No es suficiente } \frac{dV}{dt}(x, y) < 0 \quad \forall (x, y)$$

tomamos $a = b = 1$ (manteniendo condiciones anteriores)

y vemos si $\exists \delta > 0$ tq $\frac{dV}{dt} < 0 \quad \forall (x, y) \in B((0, 0); \delta) \setminus \{(0, 0)\}$

$$\Rightarrow -2[X(2x+y^2) + y(y+x^2)] < 0?$$

Si $X(2x+y^2) + y(y+x^2) > 0$ se cumple

Esto es:

$$2x^2 + xy^2 + y^2 + yx^2 > 0 \quad \sim \text{pues } y^2+1 > 2y$$

$$y[X(2x+y^2) + y(y+x^2)] > X(2x+2y-1) + y(y+2x-1)$$

$$0/0 = X(2x+2y-1) + y(2y+2x-1-y)$$

$$= X(2x+2y-1) + y(2y+2x-1-y)$$

$$= (2x+2y-1)(x+y) - y^2$$

$$= 2(x+y)^2 - (x+y) - y^2 > 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) 2(x+y)^2 - (x+y) > y^2 > 0$$

Ahora; tenemos que esto se cumple siempre.

• Propuestas:

1) Analizar

$$X' = -Ky + x(1-x^2-y^2) \quad K \in \mathbb{R}$$

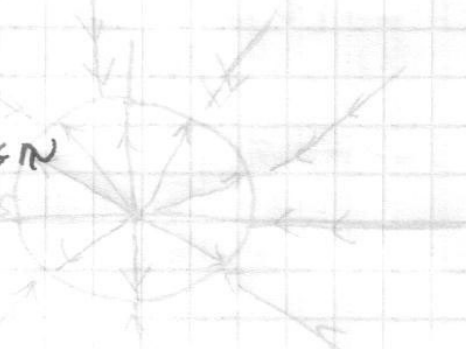
$$Y' = Kx + y(1-x^2-y^2)$$

2) Analizar Estabilidad de:

$$\left. \begin{aligned} X' &= 2y(z-1) \\ Y' &= -x(z-1) \\ Z' &= -z^3 \end{aligned} \right\} \quad \text{en } (0,0)$$

$$Z' = -z^3$$

Ind: Usar Ljapunov.



Aquí está el resumen que les debía, ojalá les vaya bien a todos el lunes.

Saludos a Todos

Cristián