

P1 (3 pts).

a) Encuentre la sol. gen. de la ec. diferencial  $y'' - 2y' + 2y = 4e^{2x} + 2e^x \cos x$ .Sol: Resolvamos la homogénea:  $y'' - 2y' + 2y = 0 \Rightarrow$  pol. característica:  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ .

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i \Rightarrow \lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = 1-i //$$

Sol. de la homogénea:  $y_H = \underbrace{Ae^x \cos x}_{y_1} + \underbrace{Be^x \sin x}_{y_2}$ , o bien,  $y_H = Ae^x e^{ix} + Be^x e^{-ix}$ .

0.5 pts

Encontramos una sol. particular  $y_p$ : Para esto hay dos formas:I. VARIACIÓN DE PARÁMETROS:  $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ ; aquí,  $f(x) = 4e^{2x} + 2e^x \cos x$ ;

$$C_1(x) = - \int \frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)} dx, \quad C_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x \cos x - e^x \sin x & e^x \sin x + e^x \cos x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$\Rightarrow C_1(x) = - \int \frac{(4e^{2x} + 2e^x \cos x) e^x \sin x}{e^{2x}} dx = -4 \int e^x \sin x dx - 2 \int \sin x \cos x dx$$

$$= -4 \int e^x \sin x dx - \int \sin 2x dx = -4 \int e^x \sin x dx + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\text{Ahora, } I = \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int \cos x e^x dx = -e^x \cos x + J$$

$$J = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I - J = -e^x \cos x \\ I + J = e^x \sin x \end{cases} \Rightarrow \boxed{I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)}, \quad J = e^x \sin x - \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{e^x \cos x}{2}$$

$$\boxed{J = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x)}$$

$$\therefore \boxed{C_1(x) = -4 \cdot \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{\cos 2x}{2} = -2e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} \cos 2x}$$

1 pto

$$C_2(x) = \int \frac{(4e^{2x} + 2e^x \cos x) e^x \cos x}{e^{2x}} dx = 4 \int e^x \cos x dx + 2 \int \cos^2 x dx$$

$$= 4 \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + 2 \int \frac{(1 + \cos 2x)}{2} dx = \boxed{2e^x (\sin x + \cos x) + x + \frac{\sin 2x}{2} = C_2(x)}$$

1 pto

$$\text{haya, } y_p(x) = (-2e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} \cos 2x) e^x \cos x + e^x \sin x (2e^x (\sin x + \cos x) + x + \frac{1}{2} \sin 2x)$$

$$y_p(x) = -2e^{2x} \sin x \cos x + 2e^{2x} \cos^2 x + \frac{1}{2} e^x \cos x \cos 2x + 2e^{2x} \sin^2 x + 2e^{2x} \sin x \cos x + x e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \sin x \sin 2x$$

$$y_p(x) = 2e^{2x} + xe^x \sin x + \frac{1}{2}e^x(\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x)$$

$$\text{Para } \cos(2x-x) = \cos(2x)\cos x + \sin(2x)\sin x$$

$$\Rightarrow y_p(x) = 2e^{2x} + xe^x \sin x + \frac{1}{2}e^x \cos x \quad \rightarrow \text{está en el kernel. (***) (lo junta con } Ae^x \cos x)$$

$$Y(x) = Ae^x \cos x + Be^x \sin x + 2e^{2x} + xe^x \sin x \quad (\text{sol. gen}) \quad \boxed{0.5 \text{ pts}}$$

II - CONSTANTES INDETERMINADAS: Aquí, debemos resolver  $y_p$  para  $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^{2x} & (\mu=2) \\ y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x \rightarrow e^{x+i x} & (\mu=1+i) \end{cases}$  (tomar parte real después)

1.-  $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}$   $\mu=2$ ,  $\lambda_1 = 1+i$ ,  $\lambda_2 = 1-i$  (todos distintos)

(Ansatz)  $\Rightarrow y_p = P_n e^{2x}$   $\left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{polinomio grado } n \end{array} \right\} \text{ en este caso } n=0 \text{ pues } e^{2x} = e^{2x} x^0_{n=0} \Rightarrow y_p = C e^{2x}$

$$\Rightarrow y_p' = 2C e^{2x} \quad , \quad y_p'' = 4C e^{2x}$$

$$\Rightarrow (4C - 4C + 2C) e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow \left[ C = \frac{1}{2} \right] \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \quad \boxed{1 \text{ pto}}$$

2.-  $y'' - 2y' + 2y = e^{(1+i)x}$ ,  $\mu = 1+i$ ,  $\lambda_1 = 1+i$ ,  $\lambda_2 = 1-i$  (iguales)

$\Rightarrow$  (Adaptación)  $y_p = P_{n+1} e^{(1+i)x}$   $\left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{pol. grado } (n+1) = 0+1=1 \end{array} \right\} y_p(x) = (C_1 + C_2 x) e^{(1+i)x}$   
 (lo eliminamos pues  $e^{(1+i)x}$  está en el kernel de la homogénea. (como por ej, (\*\*))

Notar que en no eliminamos  $C_1$ , no está mal, al final debe incluirse en la homogénea. (como por ej, (\*\*))  
 (Debe dar lo mismo)

$$y_p' = C_2 e^{(1+i)x} + C_2 x (1+i) e^{(1+i)x}$$

$$y_p'' = C_2 (1+i) e^{(1+i)x} + C_2 (1+i) e^{(1+i)x} + C_2 x (1+i)^2 e^{(1+i)x}$$

$$\Rightarrow y_p'' - 2y_p' + 2y_p = e^{(1+i)x} \Rightarrow e^{(1+i)x} [2C_2(1+i) + C_2 x (1+i)^2 - 2C_2 - 2C_2 x (1+i) + 2C_2 x] = e^{(1+i)x}$$

$$\Leftrightarrow 2C_2 i + x (C_2 (1+i)^2 - 2C_2 (1+i) + 2C_2) = 1$$

Para  $C_2 ((1+i)^2 - 2(1+i) + 2) = 0$  pues  $(1+i)$  es sol. de  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$$\Rightarrow \left[ C_2 = \frac{-i}{2} \right]$$

21 (cont.)

a) (cont.)

$$\Rightarrow y_p^{(2)} = -\frac{i}{2} x e^{(1+i)x} = \underbrace{-\frac{i}{2} x e^x \cos x}_{\text{la bota.}} + \underbrace{\frac{1}{2} x e^x \sin x}_{\text{parte real (me sirve)}} \quad \boxed{1 \text{ pto}}$$

$$\Rightarrow y(x) = A e^x \cos x + B e^x \sin x + 4 \left( \frac{1}{2} e^{2x} \right) + 2 \left( \frac{1}{2} x e^x \sin x \right) \quad (\text{ppio. de superposición})$$

$$\boxed{y_{\text{og}} = A e^x \cos x + B e^x \sin x + 2 e^{2x} + x e^x \sin x} \quad (\text{sol. gral.}) \quad \boxed{0.5 \text{ pts}}$$

b) (3pts) Encuentre la sol. del problema de c.v.:

$$(1) \begin{cases} x^2 y'' + 2x y' - 6y = 50 \ln x / x^3, & x > 0 \\ y(1) = 1, & y'(1) = 5 \end{cases}$$

Sol: (Para la homogénea)

 Intentamos una solución de la forma  $y = x^\alpha \Rightarrow$  reemplazando en (1),

$$x^2 \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} + 2x \cdot \alpha x^{\alpha-1} - 6 x^\alpha = 0.$$

$$\Rightarrow \cancel{x^\alpha} (\alpha^2 - \alpha + 2\alpha - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow (\alpha+3)(\alpha-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -3 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^{-3}. \quad \text{Claramente estas sols. son li, en efecto,}$$

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-3} \\ 2x & -3x^{-4} \end{vmatrix} = -3x^{-2} - 2x^{-2} = -5x^{-2} \neq 0 \text{ para } x > 0. \quad (\Rightarrow \text{son li})$$

$$\Rightarrow \boxed{y_H(x) = A x^2 + B x^{-3}} \quad \boxed{1 \text{ pts}}$$

Para la solución particular, usamos variación de parámetros (OJO, NO SE PUEDE USAR CTES. INDETERMINADAS, PUES LA EDO NO ES A COEF. CTES)

$$y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),$$

la ec. normalizada es  $y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{6}{x^2} y = 50 \frac{\ln x}{x^5}, \quad x > 0.$

$$\Rightarrow \left[ f(x) = 50 \frac{\ln x}{x^5} \right]$$

$$C_1(x) = - \int \frac{f(x) y_2(x) dx}{W(y_1, y_2)(x)} = - \int \frac{50 \frac{\ln x}{x^5} \cdot \frac{1}{x^3} \left( -\frac{1}{5} \right) x^2 dx}{-5x^{-2}} = +10 \int \frac{\ln x}{x^6} dx$$

$u = \ln x$   
 $du = \frac{1}{x} dx$   
 $x = e^u$

$$= 10 \int \frac{u du}{e^{5u}} = 10 \int u e^{-5u} du = 10 \left( \frac{u e^{-5u}}{-5} - \int \frac{e^{-5u}}{-5} du \right)$$

$$= -2u e^{-5u} + 2 \frac{e^{-5u}}{5} = -2e^{-5u} \left( u + \frac{1}{5} \right)$$

$$\therefore c_1(x) = -2e^{-5u} \left(u + \frac{1}{5}\right) = \boxed{-\frac{2}{x^5} \left(\ln x + \frac{1}{5}\right)} = c_1(x) \quad \boxed{0.5 \text{ pts}}$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{w(y_1, y_2)(x)} dx = \int \frac{50 \ln x}{x^5} \frac{x^2}{(-5)} x^2 dx = -10 \int \frac{\ln x}{x} dx \quad \begin{matrix} u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx, x = e^u \\ \uparrow \\ = -10 \int u du = -\frac{10}{2} u^2 \end{matrix}$$

$$\therefore \boxed{c_2(x) = -5(\ln x)^2} \quad \boxed{0.5 \text{ pts}}$$

$$\therefore y_p(x) = x^2 \overset{y_1}{\left(-\frac{2}{x^5} \left(\ln x + \frac{1}{5}\right)\right)} - 5 \frac{(\ln x)^2}{x^3} \overset{y_2}{=} -\frac{1}{x^3} \left(5(\ln x)^2 + 2 \ln x + \frac{2}{5}\right) \quad \text{la botamos}$$

Para  $-\frac{2}{5x^3} \in \langle \frac{1}{x^3}, x^2 \rangle \Rightarrow$  no la sacamos (la introducimos a  $B_{x^{-3}}$ )

$$\therefore \boxed{y_p(x) = -\frac{1}{x^3} (5(\ln x)^2 + 2 \ln x)}$$

$$\therefore \boxed{y(x) = Ax^2 + Bx^{-3} - \frac{1}{x^3} (5(\ln x)^2 + 2 \ln x)} \quad \boxed{0.5 \text{ pts}}$$

$$y'(x) = 2Ax - \frac{3B}{x^4} + \frac{3}{x^4} (5(\ln x)^2 + 2 \ln x) - \frac{1}{x^3} \left(10(\ln x) \frac{1}{x} + \frac{2}{x}\right)$$

$$\boxed{y'(x) = 2Ax - \frac{3B}{x^4} + \frac{15}{x^4} (\ln x)^2 - \frac{4 \ln x}{x^4} - \frac{2}{x^4}}$$

Ahora evaluamos las c.i.:  $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1) = 1 = A + B - 0 \Rightarrow A + B = 1 \\ y'(1) = 5 = 2A - 3B - 2 \Rightarrow 2A - 3B = 7 \end{cases}$

$$\Rightarrow -5B = 5 \Rightarrow \boxed{B = -1}$$

$$\boxed{A = 2}$$

$$\therefore y(x) = 2x^2 - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^3} (5(\ln x)^2 + 2 \ln x)$$

$$\boxed{y(x) = 2x^2 - \frac{1}{x^3} (5(\ln x)^2 + 2 \ln x + 1)} \quad \boxed{0.5 \text{ pts}}$$



P2]

(a) Encuentra la sol. gen. en  $\mathbb{R}$  de la ecuación  $y'' + 2 \tanh(x) y' + y = 0$ . (\*)

Sol: (3pts) Ind:  $L(y) = y' + \tanh(x) y$ . Calculemos  $L(L(y))$ :

$$\begin{aligned} L(L(y)) &= L(y' + \tanh(x) y) = y'' + \tanh(x)' y + \tanh(x) y' + \tanh(x) y' + \tanh^2(x) y \\ &= y'' + 2 \tanh(x) y' + y (\tanh^2(x) + \tanh(x)') \end{aligned}$$

Para  $\tanh(x)' = \left( \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right)' = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

$$\Rightarrow \tanh^2(x) + \tanh(x)' = \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} + \frac{1}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1$$

$$\Rightarrow L(L(y)) = y'' + 2 \tanh(x) y' + y \quad \boxed{0.5 \text{ pts}}$$

luego debemos encontrar un conjunto fundamental de  $L(L(y)) = 0$ , i.e.,  $\text{Ker}(L \circ L)$

Para  $\text{Ker } L \subseteq \text{Ker}(L \circ L)$ ; en efecto, si  $L(y) = 0 \Rightarrow L(L(y)) = L(0) = 0$ , pues

$L$  es lineal. luego, encontremos una solución de  $L(y) = 0$ , que también será solución de  $L(L(y)) = 0$ . 0.5 pts

$$L(y) = 0 \Leftrightarrow y' + \tanh(x) y = 0 \quad / \quad e^{\int \tanh(x) dx}$$

$$y' \cosh(x) + \tanh(x) \cosh(x) y = 0$$

$$(y \cosh(x))' = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{k}{\cosh(x)} \quad \boxed{1 \text{ pto}}$$

luego, una solución de (\*) es  $y_1 = \frac{1}{\cosh(x)}$ .

La otra la sacamos por reducción de orden:  $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx$

donde  $p = 2 \tanh(x) \Rightarrow y_2 = \frac{1}{\cosh(x)} \int \frac{e^{-2 \ln(\cosh(x))}}{\frac{1}{\cosh^2(x)}} dx = \frac{1}{\cosh(x)} \int \frac{\cosh^2(x)}{\cosh^2(x)} dx$

$$\left[ y_2 = \frac{x}{\cosh(x)} \right]$$

luego, la solución de (\*) es  $y = A \frac{1}{\cosh(x)} + B \frac{x}{\cosh(x)} \quad \boxed{1 \text{ pto}}$

b) Consideremos el problema de CB:  $(1) \begin{cases} y'' + py = g & \text{en } [a, b] \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$ , en  $p, g$  continuas en  $[a, b]$ .

2.1) si  $p \leq 0$  en  $[a, b]$ , entonces este problema posee solución periférica.

Sol: Supongamos  $g \equiv 0$ , y multipliquemos la ecuación por  $y$  (continua) e integremos por partes.

$$y''y + py^2 = 0 \quad \int_a^b dx$$

$$\int_a^b y''(x)y(x) dx + \int_a^b p(x)y^2(x) dx = 0.$$

(JPP)

$$\cancel{y'(x)y(x)} \Big|_a^b - \int_a^b (y'(x))^2 dx + \int_a^b p(x)y^2(x) dx = 0.$$

por  $y(a) = y(b) = 0$

$$\underbrace{- \int_a^b (y'(x))^2 dx}_{\leq 0} + \underbrace{\int_a^b p(x)y^2(x) dx}_{\leq 0} = 0 \quad \boxed{1.5 \text{ pts}}$$

importante  $\leq 0$

Tenemos la suma de números menores o igual que cero igual a 0  $\Rightarrow \int_a^b (y'(x))^2 dx = 0$

como  $y$  es continua en  $[a, b] \Rightarrow y \equiv 0$  en  $[a, b]$ .  $\boxed{1 \text{ pt}}$

luego, la solución de la homogénea asociada a (1) es la trivial.

$\Rightarrow$  si  $g$  es continua, (1) tiene solución única (teorema visto en clase).

- 0 -

$\boxed{0.5 \text{ pts}}$

c) Considere el problema de (CB) de 4º orden. (3pts.)

$$(x) \begin{cases} y^{(iv)} + p y = g & \text{en } [0,1] & (1) \\ y(0) = y''(0) = 0 = y''(1) = y(1) & (2) \end{cases}$$

se  $p$  y  $g$  continuas en  $[0,1]$ . Supongamos que para  $g \equiv 0$  la solución es solo la trivial,  $y \equiv 0$ .  
 Demuestre que existe sol. de (1)-(2) para cualquier función  $g$ .

Sol: Por la teoría vista en clase, tenemos que  $y = y_H + y_P$  es sol. de (x), donde  
 $y_H$  es sol. de la ec. (x) con  $g \equiv 0$  (homogénea), e  $y_P$  una sol. particular de (1).  
 sea  $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$  conjunto fundamental de la homogénea asociada a (1). (\*\*)

Entonces

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4 + y_P$$

$$\Rightarrow y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_3 y_3' + c_4 y_4' + y_P'$$

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_3 y_3'' + c_4 y_4'' + y_P''$$

Es decir, imponemos  $y(0) = 0, y''(0) = 0$  más las usuales  $y(1) = 0, y''(1) = 0$ :

$$\begin{cases} y(0) = 0 = c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) + c_3 y_3(0) + c_4 y_4(0) + y_P(0) \\ y'(0) = 0 = c_1 y_1'(0) + c_2 y_2'(0) + c_3 y_3'(0) + c_4 y_4'(0) + y_P'(0) \\ y''(0) = 0 = c_1 y_1''(0) + c_2 y_2''(0) + c_3 y_3''(0) + c_4 y_4''(0) + y_P''(0) \\ y(1) = 0 = c_1 y_1(1) + c_2 y_2(1) + c_3 y_3(1) + c_4 y_4(1) + y_P(1) \\ y'(1) = 0 = c_1 y_1'(1) + c_2 y_2'(1) + c_3 y_3'(1) + c_4 y_4'(1) + y_P'(1) \\ y''(1) = 0 = c_1 y_1''(1) + c_2 y_2''(1) + c_3 y_3''(1) + c_4 y_4''(1) + y_P''(1) \end{cases}$$

1 pto

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) & y_3(0) & y_4(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & y_3'(0) & y_4'(0) \\ y_1''(0) & y_2''(0) & y_3''(0) & y_4''(0) \\ y_1(1) & y_2(1) & y_3(1) & y_4(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) & y_3'(1) & y_4'(1) \\ y_1''(1) & y_2''(1) & y_3''(1) & y_4''(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_P(0) \\ -y_P'(0) \\ -y_P''(0) \\ -y_P(1) \\ -y_P'(1) \\ -y_P''(1) \end{pmatrix}$$

Observamos que si este sistema tiene solución  $y$  es único. (esto prueba todo).

\*\*. En un pto. existe pues planteando el problema de c.i.

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad y^{(iv)} + p y &= g \\ (c.i.) \quad y(0) &= \alpha, \quad y''(0) = 0 \\ y(1) &= 0, \quad y''(1) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ como } p \text{ y } g \text{ son continuas, se tiene que (c.i.) tiene una única solución, un conjunto fundamental } \{y_1, y_2, y_3, y_4\} \text{ asociado a la ec. homogénea } (g \equiv 0)$$

Para ello, notemos que debemos demostrar que

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) & y_3(0) & y_4(0) \\ y_1''(0) & y_2''(0) & y_3''(0) & y_4''(0) \\ y_1(1) & y_2(1) & y_3(1) & y_4(1) \\ y_1''(1) & y_2''(1) & y_3''(1) & y_4''(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

tiene como única solución  $d_i = 0 \quad \forall i = 1, -1, +$ . 1 pto

Para hacer esto, definamos  $\phi(x) = d_1 y_1(x) + d_2 y_2(x) + d_3 y_3(x) + d_4 y_4(x)$ .

Tenemos que  $\phi(0) = 0$  ,  $\phi(1) = 0$  (pn (2))

$\phi'(0) = 0$  ,  $\phi'(1) = 0$  (tb. pn (2))

Para saber que  $\phi$  es sol. de la homogénea asociada a (\*), y por dato, esta es única y vale  $\phi \equiv 0$ .

$$\Rightarrow \phi \equiv 0 \equiv d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3 + d_4 y_4$$

Para  $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$  es li  $\Rightarrow d_i = 0 \quad \forall i = 1, -1, +$ .

$\therefore (*)$  tiene sol. únicas para cada  $g$  continua 1 pto

— 0 —

b) (3pts)  $\begin{cases} y^{(4)} - \alpha^4 y = g \text{ en } [0,1] \\ y(0) = y''(0) = 0 = y'(1) = y(1) \end{cases}$

En efecto, basta probar que  $\begin{cases} y^{(4)} - \alpha^4 y = 0 \text{ en } [0,1] \\ y(0) = y''(0) = 0 = y'(1) = y(1) \end{cases}$

tiene como única sol. la trivial, si  $\alpha \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  0.5 pts

Pol. característico de (1'):  $\lambda^4 - \alpha^4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - \alpha^2)(\lambda^2 + \alpha^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \alpha, \pm i\alpha$

$$\Rightarrow y_H(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 \cos(\alpha x) + C_4 \sin(\alpha x) \quad \leftarrow \text{0.5 pts}$$

$$\begin{cases} y_H(0) = 0 = C_1 + C_2 + C_3 \\ y_H'(1) = 0 = C_1 e^\alpha + C_2 e^{-\alpha} + C_3 \cos \alpha + C_4 \sin \alpha \end{cases}$$

(continúa...)



P3

(cont...)

$$y_H'(x) = c_1 \alpha e^{\alpha x} - c_2 \alpha e^{-\alpha x} - c_3 \alpha \sin(\alpha x) + c_4 \alpha \cos(\alpha x)$$

(b) (cont...)

$$y_H''(x) = c_1 \alpha^2 e^{\alpha x} + c_2 \alpha^2 e^{-\alpha x} - c_3 \alpha^2 \cos(\alpha x) - c_4 \alpha^2 \sin(\alpha x)$$

$$y_H''(0) = 0 = \alpha^2 (c_1 + c_2 - c_3)$$

$$y_H''(1) = 0 = \alpha^2 (c_1 e^{\alpha} + c_2 e^{-\alpha} - c_3 \cos \alpha - c_4 \sin \alpha)$$

$$\text{hazp, tenemos que } c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$\alpha^2 (c_1 + c_2 - c_3) = 0$$

$$c_1 e^{\alpha} + c_2 e^{-\alpha} + c_3 \cos \alpha + c_4 \sin \alpha = 0$$

$$\alpha^2 (c_1 e^{\alpha} + c_2 e^{-\alpha} - c_3 \cos \alpha - c_4 \sin \alpha) = 0.$$

1 pto

Supongamos  $\alpha \neq k\pi$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . En particular,  $k \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 e^{\alpha} + c_2 e^{-\alpha} + c_3 \cos \alpha + c_4 \sin \alpha = 0 \\ c_1 e^{\alpha} + c_2 e^{-\alpha} - c_3 \cos \alpha - c_4 \sin \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ c_1 e^{\alpha} + c_2 e^{-\alpha} = 0 \\ c_1 (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 \sinh(\alpha) = 0, \text{ como } \alpha \neq 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0} \Rightarrow \boxed{c_2 = 0} \text{ (por (*) )}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_3 = 0}$$

$$\boxed{c_4 \sin \alpha = 0} ; \text{ como } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{c_4 = 0}$$

$$\therefore c_i = 0 \forall i=1, 2, 3, 4$$

$$\text{hazp, } y_H(x) = 0 \cdot e^{\alpha x} + 0 \cdot e^{-\alpha x} + 0 \cdot \cos(\alpha x) + 0 \cdot \sin(\alpha x) \\ \equiv 0 //$$

1 pto

hazp, (1) tiene solución única  $\forall g$  continua (gracias a (a)).