Guía de ejercicios, MA22A

J. Dávila, F. Silva 18 de abril de 2003

1. Considere la región $\Omega = \{(x,y) : x + y \leq 4, x \geq 2, y \geq 0\}$ y sea $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$. Bosqueje Ω y
a) escriba $\int_\Omega f$ como una integral iterada $\int\int \ldots dx\, dy$.
b) Escriba $\int_\Omega f$ como una integral iterada $\int\int \ldots dy\, dx$.
c) Calcule las integrales de a) y b).

Solución. a) $\int_0^2 \int_2^{4-y} \frac{1}{x+y}\, dx\, dy$ c) $2 - 2\log(2)$.

2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo y $f_n : A \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones integrables tales que $f_n \to f$ uniformemente sobre A, es decir, $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Pruebe que f es integrable y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f.$$

Indicación. Ver el apunte.

3. Sea $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^3\}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua.
a) Exprese $\int_\Omega f$ como una integral $\int\int \ldots\ dxdy$.
b) Exprese $\int_\Omega f$ como una integral $\int\int \ldots\ dydx$.

Solución. a) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\, dx\, dy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy$

b) $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx + \int_{-1}^1 \int_{x^3}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$

4. Denotemos por Q el cuadrado $[-a,a] \times [-a,a]$ donde $a > 0$ y sea $f : Q \to \mathbb{R}$ una función que satisface $f(x) = -f(-x)\ \forall x \in Q$. Pruebe que $\int_Q f = 0$.

Indicación. Puede considerar la transformación $T(x) = -x$.

5. Sea $A = \{(x,y) : x \geq 0, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\}$ e $I = \int\int_A x^2\, dx\, dy$. Bosqueje A.
a) Exprese I como una integral $dy\, dx$.
b) Muestre que

$$I = \int_{-\pi/2}^0 \int_0^2 r^4 \cos\theta \sin^2\theta\, dr\, d\theta + \int_0^{\pi/2} \int_0^1 4r^4 \cos\theta \sin^2\theta\, dr\, d\theta.$$

c) Utilice alguna de las anteriores para calcular I

Solución. a) $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} xy^2\, dy\, dx$
b) Utilice coordenadas polares en la parte inferior de A y una variante de éstas en la superior.
c) $I = 0$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y $B(x_0, R)$ la bola de centro x_0 y radio $R > 0$.
a) Pruebe que $\lim_{R\to 0} \frac{1}{\mathrm{vol}(B(x_0,R))} \int_{B(x_0,R)} f = f(x_0)$.
b) Deduzca que si $\int_B f =$ para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Indicación. Pruebe que

$$\min_{\overline{B}(x_0,R)} f \leq \frac{1}{\mathrm{vol}(B(x_0,R))} \int_{B(x_0,R)} f \leq \max_{\overline{B}(x_0,R)} f$$

Luego utilice la continuidad de f para demostrar que

$$\lim_{R\to 0} \min_{\overline{B}(x_0,R)} f = \lim_{R\to 0} \max_{\overline{B}(x_0,R)} f = f(x_0).$$

7. Sea $\Omega = \{(x,y) : x+y \leq 4, x \geq 2, y \geq 0\}$ y $(u,v) = T(x,y) = (x, x+y)$.
a) Encuentre $T(\Omega)$ y $Jac(T)$.
b) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua verifique que

$$\int_{\Omega} f(x+y)\, dx\, dy = \int_2^4 f(v)(v-2)\, dv.$$

Solución. a) $T(\Omega)$ es el triángulo de vértices $(2,2)$, $(4,4)$ y $(2,4)$ y $Jac(T) = 1$.
b) Usar teorema del cambio de variables.

8. Calcule el volumen de la región $T = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.

Solución. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1\, dz\, dy\, dx = \frac{1}{6}$.

9. Sea $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ si $x+y \neq 0$, $f(x,-x) = 0$.
a) Es f integrable sobre $[0,1] \times [0,1]$.
b) Verifique que $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx$.

Solución.
a) f no es acotada sobre $[0,1] \times [0,1]$, luego no es integrable en ese conjunto.
b) $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy = -\frac{1}{2}$ $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{2}$ Observar que la última integración en ambos casos es impropia.

10. a) Demuestre que $\int_a^b \int_a^y f(x) dx dy = \int_a^b (b-x) f(x) dx$
b) Pruebe por inducción que $\int_a^b \int_a^{x_n} \ldots\ldots \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 \ldots\ldots dx_{n-1} dx_n = \int_a^b \frac{(b-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} dx$
11. (Para quienes no hayan asistido a auxiliar) Pruebe que:
a) $\int_0^1 \{\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy\} dx = \frac{1}{2}$ y que b) $\int_0^1 \{\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx\} dy = -\frac{1}{2}$ y explique por qué no es aplicable Fubini a este problema.
12. Pruebe que:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy dx = \frac{e-1}{2}$$

Hint: Aplique la transformación $x+y = u$ y $y = uv$.

13. Sea R la región limitada por $x+y=1$, $x=0$, $y=0$. Probar que:

$$\int_R \cos\{\frac{x-y}{x+y}\} dx dy = \sin 1$$

Hint: Haga el cambio de variables $u = x-y$, $v = x+y$.
14. Si R es la región $x^2 + xy + y^2 \leq 1$, probar que

$$\int_R e^{-(x^2+xy+y^2)} dx dy = \frac{2\pi(e-1)}{\sqrt{3}}$$

Hint: Sean $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$ y elíjase α de modo que se elimine el término en xy del integrando. Luego tome $u = a\rho\cos\theta$, $v = b\rho\sin\theta$ con a y b elegidos convenientemente.
15. Comprobar que la sustitución de variables $x+y = \xi$, $y = \xi\eta$ transforma el triángulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x$ en el cuadrado $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$.
16. Sea R la región $x^2 + y^2 \leq a^2$. Probar que si m y n son enteros positivos y al menos uno de ellos es impar entonces se tiene que $\int_R x^m y^n dx dy = 0$.