Sebastián Court.

Guia Control #3

Prof: M. Leseigneur.

Integrales, Multiplicadores de Lagrange, convexidad, Métodos Numéricos.

Problema 1: Sea $f: \mathbb{R}^3_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = \ln(xyz^3)$

a) Encuentre el máximo de f sobre el conjunto

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 = 5r^2,\ x>0, y>0, z>0\}$$

b) Usando la anterior demuestre que:

si $a,b,c>0 \Rightarrow abc^3 \leq 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$

Problema 2: Determinar el paralelepípedo de lados paralelos a los ejes de coordenadas y de máximo volumen que cabe dentro del elipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Problema 3: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, A un conjunto convexo. Demuestre que f es convexa si y solo si $\forall n \geq 2$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

donde $\lambda_i \geq 0$, $\forall i$, $x_i \in A$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Problema 4:

Resuelva (aplique la condición de 1er y 2° orden):

a) $\max\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ s.a. $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

b) $\max\ -\sum_{i=1}^{n} x_i \ln(x_i)$ s.a. $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ $x_i > 0\ \forall i$

Problema 5: Considere una caja rectangular sin tapa de $32\,cm^2$ de superficie. Determine las dimensiones de la caja tal que su volumen sea máximo.

Problema 6: Determine los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ que están a menor distancia del origen.

Problema 7: Se construye un pentagono apoyando un triángulo isósceles sobre un rectangulo. Encuentre el máximo valor del área para el pentagono si el perimetro del mismo está limitado a un valor fijo L.

Problema 8: Sea $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ y convexa. Se define $f(x) = e^{g(x)}$. Muestre que f es convexa.

Problema 9: Encuentre los máximos y mínimos globales de la función $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ sobre la región delimitada por $x = 0$, $y = 4$, $x = y$.

Problema 10: Encuentre los máximos y mínimos de

$f(x,y) = (x+y)^4 + (x-y)^2$ sujeto a $x^2+y^2=1$; $x>0$.

Problema 11: Considere una fábrica que produce productos A y B. Para ello requiere, como insumos, mano de obra y materiales. Los coeficientes técnicos de utilización de estos insumos son:

Insumos	Producto A	Producto B
mano de obra hrs/hombre	6	3
materiales	5	4

Existe además, una capacidad límite de mano de obra de 45 $\frac{hrs}{hombre}$ y una de materiales de 30 u.m.

El beneficio unitario de venta del producto A es de \$30 y del producto B es \$10.

¿Cuanto se debe producir de ambos bienes para maximizar los beneficios de la empresa?

Problema 12: Considere el problema (P) $\min f(x,y)$
s.a $(x,y) \in \Omega$

con $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2 + 18x + 8y + 25$ y $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq 0 ; x+y \geq$

1.- Grafique las curvas de nivel de f y el grafique Ω.

2.- Resuelva (P).

Problema 13: Sea (P): $\min\ x^2+y^2$; s.a. $(x-1)^3-y^2=0$

i) Justifique, sin usar calculo diferencial, que (1,0) es el mínimo de (P).

ii) Transforme el problema a uno sin restricciones y determine (si es posible) el punto mínimo del problema.

iii) Resuelva (P) utilizando Lagrange. (si es posible).

Problema 14: – Calcular $\displaystyle\int_D \frac{dx\,dy\,dz}{\ln(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ con $D=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 / 4\le x^2+y^2+z^2\le 9\}$

– Calcular $\displaystyle\int_R \left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{1/2} xyz\,dx\,dy\,dz$ con R la región del primer octante acotada por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ y los planos coordenados.

Problema 15: Evaluar $\displaystyle I=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{8-x^2-y^2} xy\,dz\,dx\,dy$ utilizando coordenadas cilindricas.

Problema 16: Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{1-|x|}\int_0^{2x+y} dz\,dy\,dx$

Obtenga las expresiones para la integral en los ordenes $dx\,dy\,dz$ y $dy\,dz\,dx$.

Problema 17: Calcular la masa del sólido descrito por $x^2+y^2+z^2 \leq a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ cuya densidad esta dada por $\rho(x,y,z) = xyz$

Problema 18: i) Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ z \leq 0\}$.

Calcular
$$\int_A \frac{dx\,dy\,dz}{1+x^2+y^2+z^2}$$

ii) Calcular el volumen de la región del primer octante limitada por $z = xy$, $x^2+y^2 = 1$.

Problema 19: Calcular los puntos de la elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ cuya distancia al origen es máxima y mínima.

Problema 20: Una esfera centrada en el origen y de radio r se corta por un plano horizontal a una altura h $(0<h<r)$. Hallar el volumen de la parte ~~superior~~ de la esfera que se encuentra sobre dicho plano.

Problema 21: Sea la recta R, dada por $y=2$, $x+z=2$, y el punto $P=(x_0,y_0,z_0)$. Calcular, el punto de R más cercano a P y, asimismo, la distancia mínima de P a R.
Además Dado el elipsoide $x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^3}{3}=1$, calcular los puntos más cercanos y lejanos del elipsoide a la recta anterior.

Problema 22: Resuelva $(P): \max\ x_1 + \dots + x_n$

$$\text{s.a. } x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

y pruebe que si $\vec{v}$ es un vector tal que cada una de sus componentes es positiva, se tiene que:

$$\|\vec{v}\|_1 \leq \frac{n}{\sqrt{n}} \|\vec{v}\|_2$$

Problema 23: Demuestre que la caja de volumen máximo que puede ser colocada dentro de una esfera de radio R es un cubo.

Problema 24: Calcule los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 - y^2$ en el triangulo determinado por los puntos $A = (3,0)$, $B = (0,3)$ y $C = (-2,-2)$.

Problema 25: Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2} x^t Q x - x^t b$$

Donde Q es una matriz de $n \times n$ simetrica definida positiva. Considere el método del gradiente dado por

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

i) Muestre que $g_k = Q x_k - b$.

ii) Muestre que

$$\alpha_k = \frac{g_k^t g_k}{g_k^t Q g_k}$$

iii) Utilice el metodo del gradiente para aproximar el mínimo de la función $f(x,y) = 5x^2+5y^2-2xy-x+y+11$ con $x_0=(0,0)$.

iv) ¿Cuantas iteraciones del metodo de Newton son necesarias para llegar al optimo de f?

Hint: En (iii) calcule unas 3 o 4 iteraciones y vea con cuantas iteraciones usando newton se llega a valores similares.

Problema 26: Resuelva

$$\begin{aligned} x^5+y^2z^4+1 &= 0 \\ x^2yz &= 0 \\ z^4-1 &= 0 \end{aligned}$$

Usando el metodo de newton con $X_0=(0.1,0.1,0.1)$; $X_0=(-100,0,100)$.

Problema 27: Use el método de Newton para determinar los puntos críticos de

$$f(x,y) = x^2-xy+2y^2-2x+e^{x+y}$$

Problema 28: Sea Q una matriz simetrica, definida positiva. Considere $f(x) = \langle Qx, x\rangle$

i) Demuestre que f admite un mínimo $\bar{x}$ sobre la esfera de radio 1, y que se tiene que $Q\bar{x}=\lambda\bar{x}$ para algún λ real.

ii) Considere ahora el mínimo de f, $\bar{x}'$, sobre la parte de la esfera unitaria que es ortogonal al vector $\bar{x}$ de la parte (i). Demuestre que existe un escalar λ' tal que $Q\bar{x}'=\lambda'\bar{x}'$, que cumple $\lambda<\lambda'$.

Problema 29:

Calcule:

i) $$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{1}(2-2x^2-2y^2)\,dz\,dy\,dx \qquad \left(\text{Resp: } \frac{\pi}{2}\right)$$

ii) $$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{3}^{4-x^2-y} x\,dz\,dy\,dx \qquad \left(\text{Resp: } \frac{1}{12}\right)$$

Problema 30:

Encuentre el volumen del elipsoide:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1. \qquad \left(\text{Resp: } \frac{16\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

Problema 31: Encuentre el volumen del sólido acotado por abajo por el plano xy y por arriba por la superficie

$x^2+y^2+z^6=5$ (Resp: 17.6)

Problema 32: Evalue la integral $$\int_{0}^{3}\int_{0}^{4}\int_{y/2}^{\frac{y}{2}+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)dx\,dy\,dz$$

Indicación: considere el cambio de variables:

$$u=\frac{2x-y}{2}\ ;\ v=\frac{y}{2}\ ;\ w=\frac{z}{3}. \qquad (\text{Resp: } 12)$$

Problema 33: Considere un cilindro solido de Radio R y altura H. Sea $\rho(x,y,z)=kz$.

a) Calcule la Masa

b) Encuentre el centro de Masa

c) Encuentre los momentos de Inercia.

(Resp: (a) $\frac{1}{2}\pi k R^2 h^2$

(b) $(0,0,\frac{2h}{3})$

(c) $(I_z=\frac{MR^2}{2})$)

Problema 34: Realice lo mismo que en el problema 33, pero con un cono de base con radio R y de altura h.

(Resp: (b) $\left(0, 0, \frac{3}{4}h\right)$ (c) $I_z = \frac{3}{10} M R^2$)

Problema 35: Encuentre la masa de una esfera de radio R si la densidad varía directamente con la distancia a los bordes.

(Resp: $\frac{1}{3}\pi k R^4$)

Problema 36: Encuentre la masa de la bola $\rho \leq 2R\cos\phi$ (con ϕ el angulo que parte desde el eje z de esfericas) dado que la densidad varia directamente:

a) con ρ

b) con $\rho \operatorname{sen}\phi$

c) con $\rho \cos^2\theta \operatorname{sen}\phi$

(Resp: (a) $\frac{8}{5}k\pi R^4$ (b) $\frac{1}{4}k\pi^2 R^4$ (c) $\frac{1}{8}k\pi^2 R^4$)

Dudas, comentarios, sugerencias o inquietudes a
scourt@ing.uchile.cl

Suerte en el Control,

Sebastián Court.