UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MAT.

CURSO: MA22A-05 CALCULO EN VARIAS VARIABLES
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR
FECHA: 06 / 07 / 2004 TIEMPO: 3 HORAS

EXAMEN

1.-
a) Calcular el volumen de la región definida por:

$$A=\left\{(x,y,z)\in R^3 / 1\leq x^2+y^2\leq 2x; 0\leq z\leq \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right\}$$

b) Encontrar un punto P de coordenadas positivas perteneciente al elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, tal que el plano tangente al elipsoide en P determine con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo. Justifique que se trata de un mínimo.

2.-
a) De entre todos los planos que contienen al punto (a,b,c) situado en el octante positivo, determine aquel que hace mínimo el volumen del tetraedro que forma con los planos coordenados. Calcule dicho volumen.

b) Dada la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

y el cambio de variables $u=ax+y$, $v=2x$.
Calcular $a\in R$ para que la única derivada parcial de segundo orden que aparezca en la ecuación transformada sea $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

3.- Sea $F:R^2\to R$ una función dos veces continuamente diferenciable tal que $\|\nabla F(x,y)\|\neq 0\ \forall x,y$.
Pruebe que la curvatura de las curvas de nivel de F viene dada por:

$$k=\frac{\left|(\frac{\partial F}{\partial x})^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+(\frac{\partial F}{\partial y})^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|}{\|\nabla F\|^3}$$

i) Pruebe que $\nabla F\perp\hat{T}$ y escriba $\hat{T}$ en función de las derivadas de F, donde $\hat{T}$ es el vector tangente a la curva $s(s)$ (1 punto)

Indicación: Sin pérdida de generalidad, suponga que una curva de nivel de constante C se parametriza en longitud de arco por $s(s)=(x(s),y(s))$, donde $F(x(s),y(s))=C$. Además se cumple que $\left\|\frac{ds}{ds}\right\|=1$

ii) Pruebe que ∇F y $\dfrac{d\hat{T}}{ds}$ son paralelos, esto es, existe $a(s)$ tal que

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = a(s)\nabla F$$

(1 punto)

iii) Usando i) ii) encuentre una expresión para $\dfrac{d\hat{T}}{ds}$. (2 puntos)

iv) Usando todo lo anterior concluya la expresión para la curvatura. (2 puntos)

Indicación: Utilice que $k = \left\| \dfrac{d\hat{T}}{ds} \right\|$.

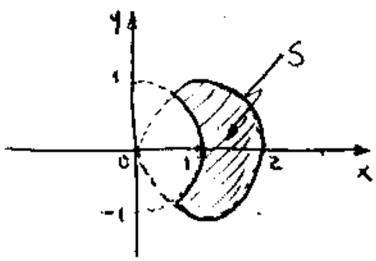
Examen 2004-1

1.-

a) $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \; 1 \leq x^2+y^2 \leq 2x \;\wedge\; 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \}$

En el plano x-y la sombra de A está dada por: $1 \leq x^2+y^2$

$(x-1)^2+y^2 \leq 1$



Por lo tanto el volumen de A está dado por:

$$V = \iint_S \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

Veamos los límites de integración

$$r^2 = 2\cancel{r}\cos\theta \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} = \cos\theta \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq r \leq 2\cos\theta$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

Luego

$$V = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{1}^{2\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{4-r^2}}\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(-\sqrt{4-r^2}\right)\Big|_1^{2\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{3} - 2\sqrt{\text{sen}^2}\right) d\theta$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - 2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |\text{sen}\,\theta|\, d\theta = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - 4\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \text{sen}\,\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\sqrt{3} + 4\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = \frac{2\pi}{3}\sqrt{3} + 4\,\frac{1}{2} - 4$$

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - 2}$$

Examen 2004-1

1:

b) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ Sea $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$

$$\Rightarrow \nabla F=\left(\frac{2x}{a^2},\ \frac{2y}{b^2},\ \frac{2z}{c^2}\right)$$

El plano tangente al elipsoide en P de coordenadas (x_0,y_0,z_0) es.

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$$ con vértices $\left(\frac{a^2}{x_0},0,0\right)\left(0,\frac{b^2}{y_0},0\right)\left(0,0,\frac{c^2}{z_0}\right)$

Pero el volumen de un tetraedro con vértices $(a,0,0)$ $(0,b,0)$ $(0,0,c)$ es $V=\dfrac{abc}{6}$

En nuestro caso el volumen es $V=\dfrac{1}{6}\dfrac{a^2}{x_0}\dfrac{b^2}{y_0}\dfrac{c^2}{z_0}=\dfrac{(abc)^2}{6x_0y_0z_0}$

Por lo tanto el problema de optimización es

$$\begin{aligned}&\min \quad \frac{a^2b^2c^2}{xyz}\\ &\text{s a} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ &\qquad x>0\quad y>0\quad z>0\end{aligned}$$

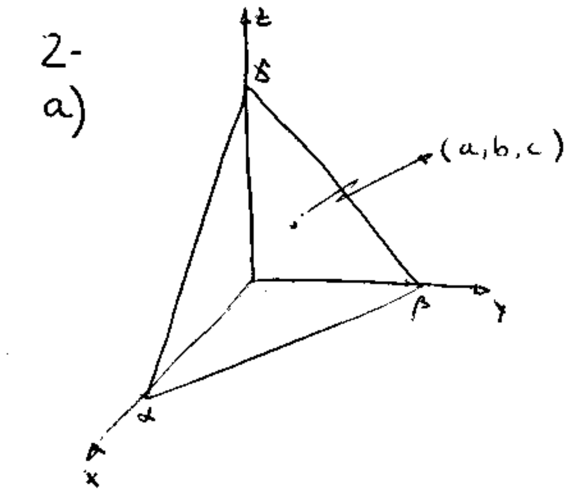
$$L=\frac{a^2b^2c^2}{xyz}-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}&=-\frac{a^2b^2c^2}{x^2yz}-2\lambda\frac{x}{a^2}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}&=-\frac{a^2b^2c^2}{xy^2z}-2\lambda\frac{y}{b^2}=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}&=-\frac{a^2b^2c^2}{xyz^2}-2\lambda\frac{z}{c^2}=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}&=-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)=0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}x&=\frac{a}{\sqrt3}\\ y&=\frac{b}{\sqrt3}\\ z&=\frac{c}{\sqrt3}\end{aligned}$$

Claramente es un mínimo pues el volumen no tiene máximo.

Examen 2004-1

2-
a)



El volumen del tetraedro está dado por:

$$V = \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$$

Busquemos la ec. del plano con vértices $(\alpha,0,0)$ $(0,\beta,0)$ $(0,0,\gamma)$

$Ax + By + Cz + D = 0$

$$\Rightarrow A\alpha + D = 0 \qquad B\beta + D = 0 \qquad C\gamma + D = 0$$
$$A = -\frac{D}{\alpha} \qquad B = -\frac{D}{\beta} \qquad C = -\frac{D}{\gamma}$$

$$\Rightarrow -\frac{D}{\alpha}x - \frac{D}{\beta}y - \frac{D}{\gamma}z + D = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1 \quad \text{Ec. Plano}}$$

Como el punto (a,b,c) está en el plano entonces

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 1$$

Luego el problema de optimización es:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Min} & \dfrac{\alpha\beta\gamma}{6} \\ \text{s.a} & \dfrac{a}{\alpha} + \dfrac{b}{\beta} + \dfrac{c}{\gamma} = 1 \end{array}}$$

$$L = \frac{\alpha\beta\gamma}{6} - \lambda\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} - 1\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{\beta\gamma}{6} + \frac{\lambda a}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha\beta\gamma}{6} = -\frac{a}{\alpha}\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{\alpha\gamma}{6} + \frac{\lambda b}{\beta^2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha\beta\gamma}{6} = -\frac{b}{\beta}\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \frac{\alpha\beta}{6} + \frac{\lambda c}{\gamma^2} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha\beta\gamma}{6} = -\frac{c}{\gamma}\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} - 1\right) = 0$$

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{2} = -\lambda\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right) = -\lambda$$

$$\Rightarrow \alpha = 3a, \quad \beta = 3b, \quad \gamma = 3c$$

Luego el plano pedido es

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3}$$

Examen 2004-1

2-

b) (*) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

$u = ax + y$

$v = 2x$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial z}{\partial u} + 2\frac{\partial z}{\partial v}} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 4a\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = a\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left[(a+1)^2\right] + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left[4\right] + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left[4a+4\right] + \frac{\partial z}{\partial u}\left[-a-1\right] - 2\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 = 0 \wedge 4(a+1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Examen 2004-1

3-

i) Sea $F(x(s), y(s)) = C \;\Big/ \frac{d}{ds}$

$$\Rightarrow \quad \nabla F \cdot \underbrace{\frac{d\sigma}{ds}}_{\hat{T}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla F \perp \hat{T} \quad \text{con} \quad \hat{T} = \left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{1}{\|\nabla F\|}$$

ii) Notemos que $\hat{N} = \frac{d\hat{T}}{ds}$ y $\hat{N} \perp \hat{T}$

$$\Rightarrow \quad \nabla F \parallel \hat{N} \quad \text{o bien existe } \alpha(s) \Big/ \frac{d\hat{T}}{ds} = \alpha(s)\nabla F$$

iii)
$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{1}{\|\nabla F\|}\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}x' - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y', \; \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}x' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}y'\right) +$$
$$\left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x}\right)\cdot\frac{-1}{\|\nabla F\|^3}\underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}x' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}y'\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}x' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'\right)\right]}_{(*)}$$

con $x' = -\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{1}{\|\nabla F\|}$ $\quad y' = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{1}{\|\nabla F\|}$

iv) Notemos que
$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \alpha(s)\nabla F \quad \Big/ \cdot \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|^2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha(s) = \frac{d\hat{T}}{ds}\cdot\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|^2}$$

Luego

$$\alpha(s) = \frac{1}{\|\nabla F\|^3}\left(-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}x' - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot y'\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}y'\right) +$$
$$+\left(\cancel{-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}}\right)\frac{-1}{\|\nabla F\|^5}\cdot(*)$$

Reemplazando x' e y' se tiene

$$\alpha(s) = \frac{-1}{\|\nabla F\|^4}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)$$

Notemos que

$$k = \left\|\frac{d\hat{T}}{ds}\right\| = \|\alpha(s)\nabla F\| = |\alpha(s)|\,\|\nabla F\| \Rightarrow \text{Lo pedido.}$$