UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MAT.

CURSO : MA22A-05 CALCULO EN VARIAS VARIABLES
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR
FECHA: 26 / 05 / 2004 TIEMPO: 3 HORAS

CONTROL #2

1.-

i) Sea $f : R^n \to R, \quad n \geq 3$ definida por :

$f(x) = g(\| x \|_2)$ donde $g : R \to R$ de clase C^2.

a) Probar que

$$\Delta f = \frac{n-1}{r} g'(r) + g''(r) \qquad r = \| x \|_2 \neq 0$$

b) Probar que si $\Delta f = 0$ entonces existen constantes a y b tales que:

$$f(x) = \frac{a}{\| x \|_2^{n-2}} + b \qquad x \neq 0$$

ii) Sea $f(x,y) = g(x,y)e^{ax+by}$ con $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$. Determine el valor de las constantes a y b para que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + f = 0$$

Solución

i)

a) Sea $f(x) = g(\| x \|_2) = g(r)$ luego

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g'(r)\frac{x_i}{r} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = g''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + g'(r)\left[\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right]$$

$$\Rightarrow \Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = g''(r)\frac{\sum x_i^2}{r^2} + g'(r)\sum\left[\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right] = 0$$

$$g''(r) + g'(r)\left(\frac{n-1}{r}\right) = 0$$

b) Basta probar que $f(x) = \frac{a}{\| x \|_2^{n-2}} + b$ satisface la ecuación diferencial

$$\Rightarrow g(r) = \frac{a}{r^{n-2}} + b \Rightarrow g'(r) = (2-n)ar^{1-n} \qquad g''(r) = (2-n)(1-n)ar^{-n}$$

ii) $f(x,y) = g(x,y)e^{ax+by}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} e^{ax+by} + gae^{ax+by} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} e^{ax+by} + gbe^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} e^{ax+by} + a\frac{\partial g}{\partial y} e^{ax+by} + b\frac{\partial g}{\partial x} e^{ax+by} + abge^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + f = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} e^{ax+by} + (a-1)\frac{\partial g}{\partial y} e^{ax+by} + (b-1)\frac{\partial g}{\partial x} e^{ax+by} + (ab - a - b + 1)ge^{ax+by} = 0$$

$$\Rightarrow a = b = 1$$

2.- Sea $f : R^2 \to R$ definida por:

$$f(x, y) = x^3 - xy + \cos(p(x + y))$$

i) Encuentre un vector normal a la curva de nivel f(x,y)=1 en el punto (1,1)
ii) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel f(x,y)=1, en el punto (1,1).
iii) Encuentre un vector normal al grafo de f en el punto (1,1).
iv) Encuentre la ecuación del plano tangente al grafo de f en (1,1).
v) Encuentre la aproximación de segundo orden de f en el punto (1,1).

Solución

i) $\nabla f(1,1) = (2,-1)$

$$x^3 - xy + \cos(p(x + y)) = 1 \qquad / \frac{d}{dx}$$

ii) $3x^2 - y - xy' - sen(p(x + y))(p + py') = 0 \quad evaluando \quad en (1,1)$

$$y' = 2 \Rightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$$

v)

$$f(x, y) \approx f(1,1) + \left\langle \nabla f(1,1), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}((x-1),(y-1)) H_f(1,1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) \approx 2 - 2p^2 + x(2p^2 - 3) + y2p^2 + \frac{x^2}{2}(6 - p^2) - \frac{y^2}{2}p^2 - xy(p^2 + 1)$$

iv)

$$z = f(1,1) + \left\langle \nabla f(1,1), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow z = 1 + 2x - y - 1 \Rightarrow 2x - y - z = 0$$

iii) $\vec{N} = (2,-1,-1)$

3.-

i) Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2p}\, s} e^{\frac{-(x-m)^2}{2s^2}}$

donde µ y s son parámetros tales que -8 < µ < 8 , s > 0.

Sea $\{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto de observaciones donde $x_i \in R \qquad i = 1,...,n$
Se define

$$L(m, s) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

a) Encuentre *L(µ , s)* explícitamente.

b) Resuelva el problema:

$$Max \qquad Log(L(m,s))$$

es decir, encuentre $\hat{m}$ y $\hat{s}$ que maximizan la función $Log(L(m,s))$. Tanto $\hat{m}$ y $\hat{s}$ dependen sólo de $\{x_1,...,x_n\}$. Debe demostrar <u>rigurosamente</u> que ($\hat{m}$, $\hat{s}$) es un máximo.

ii) Para cada una de las siguientes funciones encuentre y clasifique los puntos críticos en todo el espacio, salvo que se indique otra cosa. Determine máximos y mínimos locales, globales y puntos silla.

a) $r(x,y) = (x-y)(x+y)x$

b) $p(x,y) = 4xy + \frac{288}{x} + \frac{96}{y} \qquad x>0, y>0$

c) $q(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + (2y^2)(e^x + e^{-x^2})^{1/2}$

Solución

i)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}\,s} e^{\frac{-(x-m)^2}{2s^2}}$$

$$L(m,s) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2p}\,s}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-m)^2}{s^2}} \Rightarrow Ln(L(m,s)) = -nLn(\sqrt{2p}\,s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-m)^2}{s^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial m}(Ln(L)) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{2(x_i-m)}{s}\frac{-1}{s} \Rightarrow \frac{1}{s^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{m}) = 0 \Rightarrow \hat{m} = \frac{\sum x_i}{n} = \overline{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(Ln(L)) = \frac{-n}{s} + \frac{1}{s^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 \Rightarrow \frac{-n}{\hat{s}} + \frac{1}{\hat{s}^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{m})^2 = 0 \Rightarrow \hat{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}$$

$$H_{Ln(l)} = \begin{bmatrix} \frac{-n}{s^2} & \frac{-2}{s^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m) \\ \frac{-2}{s^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m) & \frac{n}{s^2} - \frac{3}{s^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 \end{bmatrix} \Rightarrow H_{Ln(l(\hat{m},\hat{s}))} = \begin{bmatrix} \frac{-n}{\hat{s}^2} & 0 \\ 0 & \frac{-2n}{\hat{s}^2} \end{bmatrix}$$

El hessiano es definido negativo, luego el punto crítico es un máximo.

ii)

a) $\nabla r(x,y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0) \Rightarrow H_r(0,0) = [0] \Rightarrow silla$

b) $\nabla p(x,y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (6,2) \Rightarrow H_p(6,2) \quad def.positivo \Rightarrow mínimo$

c) $\nabla q(x,y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0) \Rightarrow H_q(0,0) \quad def.positivo \Rightarrow mínimo$