UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MAT.

CURSO: MA22A-05 CALCULO EN VARIAS VARIABLES
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR
AUXILIARES: ALFONSO TORO – SEBASTIAN COURT
FECHA DE ENTREGA: 26 / 05 / 2004 en el Control #2

TAREA #2

1.- Sea $f : R \to R$ una función de clase $C^2(R)$ tal que la función $f : U \to R$ definida por $f(x,y) = f(x^2+y^2)$ satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3y\frac{\partial f}{\partial x} = xyf(x,y) \qquad (1) \qquad\qquad \text{para } (x,y) \neq (0,0)$$

Si $f(1)=0 \qquad f'(1)=1$, resuelva la ecuación (1).

2.- Para las siguientes funciones:

$$f(x,y) = \frac{(1-x^2-y^2)^{1/2}}{x^2+y^2} \quad \text{sobre } D = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1, (x,y) \neq (0,0)\}$$

y

$$g(x,y) = \frac{x(1-x^2-y^2)^{1/2}}{y} \quad \text{sobre } D = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1, y \succ 0, (x,y) \neq (0,0)\}$$

Determine si existen máximos y/o mínimos de estas funciones en los dominios que se indican

3.- Sea $f : R^2 \to R$ de clase $C^2(R^2)$. Considere la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Nos proponemos determinar todas las soluciones de la ecuación (1), mediante el procedimiento siguiente:

a) Sea $f : R^2 \to R^2$ un cambio de variable definido por $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u = x+vt \\ w = x-vt \end{pmatrix}$

Muestre que la función $g : R^2 \to R$ definida por $g(u,w) = (f \circ f^{-1})(u,w)$ está bien definida y que es de clase $C^2(R^2)$.

b) Usando el hecho que $f(x,t) = (g \circ f)(x,t)$ demuestre que la ecuación (1) se transforma en:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w}(u,w) = 0 \quad (2) \qquad\qquad \forall (u,w) \in R^2$$

c) Determine la solución general de la ecuación (2) y deduzca una expresión general para $f(x,t)$ (solución de la ecuación 1). Encuentre una solución particular para f que no sea la función nula, ni un polinomio.

4.- Sean $\begin{array}{l} f: R^n \to R \\ .....y \to f(y) \end{array}$ una aplicación dos veces diferenciable y $\begin{array}{l} T: R^n \to R^n \\ .....x \to T(x) = Tx \end{array}$ una aplicación lineal.

Se define $F(x) = f \circ T(x)$

a) Demuestre que:

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_k \partial x_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f(Tx)}{\partial y_l \partial y_i} T_{lk} T_{ij}$$

En que $T = (T_{lk})_{l,k=1}^{n}$ es la matriz representante de T respecto a la base canónica.

b) Si T es una transformación ortonormal, es decir, $T^{-1} = T^t$, demuestre que :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(Tx)}{\partial y_i^2}$$

c) Si T es una transformación de Lorentz, es decir, $T^{-1} = ST^tS$ donde:

$$S = (S_{kj})_{k,j=1}^{n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{n.columnas} n \text{ filas}$$

Demuestre que:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{kj} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_k \partial x_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} S_{il} \frac{\partial^2 f(Tx)}{\partial y_i \partial y_l}$$

Puede serle útil (no lo demuestre):

a) Si T es una transformación de Lorentz, entonces T^{-1} es una transformación de Lorentz.
b) $S^2 = I$ (matriz Identidad)

5.- Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$2x\frac{\partial f}{\partial y} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x^2 y$$

con las condiciones de borde:

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \cos y$ $\qquad\qquad$ $f(x,0) = 2x$

6.- Calcular el valor de la expresión:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

si $z(x,y) = xj\,(y/x) + y\,(y/x)$ y las funciones $j\,,y$ son de clase C^2 .

7.- Considere una función *f (x,y)*, homogénea de grado *p* , es decir:

$$f(tx,ty) = t^p f(x,y)$$

Pruebe que:

a) $\qquad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = p(p-1)f$

b) $\qquad x^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3x^2 y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3xy^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = p(p-1)(p-2)f$

c) Por inducción pruebe

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^{r-k} y^k \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-k} \partial y^k} = p(p-1)(p-2)\ldots(p(r-1))f$$

8.- Sea $F(x,y,z) = f(f(x,x,x), f(x,y,x), f(y,y,y))$, donde $f : R^3 \to R$ es de clase $C^2(R^3)$. Determine ∇F y H_F . Verifique sus resultados para $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$

9.- Nos proponemos determinar el potencial eléctrico de todos los puntos del espacio ubicados a una distancia “r” de un punto fijo. Para ello debemos resolver la ecuación en derivadas parciales siguiente:

$$\Delta\Psi = 0 \qquad (*)$$

donde $\qquad \Delta\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MAT.

Considere el cambio de variables a coordenadas esféricas:

$$x = rsenq \cos f$$
$$y = rsenqsenf$$
$$z = r \cos q$$

a) Demuestre que (*) bajo el cambio de variables se transforma en:

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r^2 senq}\left[senq \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(senq \frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) + \frac{1}{senq}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial f^2} \right] = 0$$

b) Suponga que el potencial sólo depende de la distancia al origen del sistema de coordenadas, es decir, $\Psi(r,q,f) = V(r)$
   i) Determine la ecuación que permite calcular el potencial *V(r).*
   ii) Calcule la solución general para el potencial eléctrico, resolviendo la ecuación obtenida en i).

10.- Sea $g : R^3 \to R$ dos veces diferenciable. Pruebe que $\Delta g = 0$ toma la forma

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0$$

bajo el cambio de variables de coordenadas cilíndricas $x = r \cos q \qquad y = rsenq \qquad z = z$

11.- Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $y^2 e^{3x} \cos(xy) + z = 5$ en el punto de coordenadas $(\frac{p}{2},2,0)$

12.- Sea $f(x,y) = g(x,y)e^{ax+by}$ con $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$. Determine el valor de las constantes a y b para que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + f = 0$$

13.- Sea $f : R^n \to R$. Se dice que *f* es homogénea de grado *m* si $f(tx) = t^m f(x) \quad \forall t > 0 \wedge \forall x \in R^n$
Si *f* es diferenciable pruebe que:

$$f \text{ es homogénea de grado } m \Leftrightarrow mf(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} x_i$$

14.- Los espirales de Maclaurin corresponden a una familia de curvas en el plano que al ser descritas en coordenadas polares las variables r y q satisfacen la relación:

$$r(q) = a(sen(nq))^{1/n}$$

donde a>0 y $n \in R - \{0\}$ corresponde al orden de la espiral. Pruebe que la curvatura de una espiral de Maclaurin de orden n es:

$$k(q) = \frac{n+1}{a}(sen(nq))^{\frac{n-1}{n}}$$

15.- Sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por:

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2} \quad \text{h>0}$$

de tal forma que la altura $z = z(q)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dq} = z \\ z(0) = h \end{cases}$$

donde z y q representan dos de las tres variables en coordenadas cilíndricas.

Demuestre que $\dfrac{t}{k} = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$ donde t y k corresponden a la torsión y la curvatura de la curva respectivamente.

16.- Sea $F : R^2 \to R$ una función dos veces continuamente diferenciable tal que $\|\nabla F(x, y)\| \neq 0 \ \ \forall x, y.$

Pruebe que la curvatura de las curvas de nivel de F viene dada por:

$$k = \frac{\left| (\frac{\partial F}{\partial x})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + (\frac{\partial F}{\partial y})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|}{\|\nabla F\|^3}$$

i) Pruebe que $\nabla F \perp \hat{T}$ y escriba $\hat{T}$ en función de las derivadas de F.
Indicación: Sin pérdida de generalidad, suponga que una curva de nivel de cons tante C se parametriza en longitud de arco por $s\,(s) = (x(s), y(s))$, donde $F(x(s), y(s)) = C$. Además la curva cumple que $\left\| \dfrac{ds}{ds} \right\| = 1$

ii) Pruebe que $\nabla F \,//\, \dfrac{d\hat{T}}{ds}$ esto es, existe $a\,(s)$ tal que

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = a\,(s)\nabla F$$

iii) Usando (i) encuentre una expresión para $\dfrac{d\hat{T}}{ds}$.

iv) Usando todo lo anterior conlcuya la expresión para la curvatura.
Indicación: Utilice que $k = \left\| \dfrac{d\hat{T}}{ds} \right\|$.

17.- Sea $f : R^2 \to R$ definida por:

$$f\,(x, y) = x^3 - xy + \cos(p\,(x + y))$$

i) Encuentre un vector normal a la curva de nivel f(x,y)=1 en el punto (1,1)
ii) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel f(x,y)=1, en el punto (1,1).
iii) Encuentre un vector normal al grafo de f en el punto (1,1).
iv) Encuentre la ecuación del plano tangente al grafo de f en (1,1).
v) Encuentre la aproximación de segundo orden de f en el punto (1,1).

18.- Considere la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}\,s} e^{\frac{-(x-m)^2}{2s^2}}$ donde m, s son parámetros tales que $m \in R, s > 0$.
Sea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un conjunto de observaciones donde $x_i \in R \quad i = 1,...,n$
Se define

$$L(m,s) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

i) Encuentre $L(m,s)$ explicitamente.

ii) Resuelva el problema $Max \quad Ln(L(m,s))$

iii) Demuestre rigurosamente que los puntos que encontró son máximos.

19.- Para cada una de las siguientes funciones encuentre y clasifique los puntos críticos en todo el espacio, salvo que se indique otra cosa. Determine máximos y mínimos locales, globales y puntos silla.

i) $f(x,y) = x^3 - x^2 + 2xy + 2y^2$

ii) $g(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

iii) $h(x,y) = e^{-x+y} + x + y^2$

iv) $r(x,y) = (x-y)(x+y)x$

v) $p(x,y) = 4xy + \frac{288}{x} + \frac{96}{y} \qquad x > 0, y > 0$

vi) $q(x,y) = -y^4 - e^{-x^2} + (2y^2)(e^x + e^{-x^2})^{1/2}$

20.- Calcule el determinante del Jacobiano de las siguientes funciones:

i) $F(r,q,z) = (r\cos q, r\sin q, z)$

ii) $F(r,j,q) = (r\cos j \sin q, r\sin j \sin q, r\cos q)$

iii) $F(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$

iv) $F(r,q) = (r\cos q, r\sin q)$