UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MAT.

CURSO: MA22A-05 CALCULO EN VARIAS VARIABLES
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR
FECHA: 07 / 05 / 2004 TIEMPO: 1,5 HORAS

EJERCICIO #2

1.- Sea $f : R^2 \to R$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Determinar para qué direcciones existe la derivada direccional de *f* en *(0,0)*.

ii) Sea $l : R \to R^2$ definida por:

$$l(t) = \begin{cases} (t, t^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{t}))^T & Si \quad t \neq 0 \\ (0,0) & Si \quad t = 0 \end{cases}$$

Muestre que ? es diferenciable en $t = 0$

iii) Encuentre las derivadas parciales de *f* donde existan.

iv) Estudie la diferenciabilidad de $(f o l)$ en $t = 0$. Concluya acerca de la diferenciabilidad de *f* en *(0,0)*

Solución

i) Sea $d = (\cos q, senq)$

$$f'(0,d) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(t\cos q, tsenq) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{t^3 \cos^3 q \cdot tsenq}{t(t^4 \cos^4 q + t^2 sen^2 q)} = 0$$

la derivada direccional existe en todas las direcciones y vale 0.

ii) $$l'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{l(t) - l(0)}{t} = \begin{bmatrix} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{t} \\ \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^2 sen(\frac{1}{t})}{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$? es diferenciable en $t=0$

iii) Para $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2 y^3 - x^6 y}{(x^4 + y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^7 - x^3 y^2}{(x^4 + y^2)^2}$$

Para $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

iv) $h(t) = (f \circ l)(t) = \dfrac{t^3 t^2 sen(\frac{1}{t})}{t^4 + t^4 sen^2(\frac{1}{t})} = \dfrac{tsen(\frac{1}{t})}{1 + sen^2(\frac{1}{t})} \Rightarrow h'(0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{h(t) - h(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \dfrac{sen(\frac{1}{t})}{1 + sen^2(\frac{1}{t})}$ No existe

Como $(f \circ l)$ no es diferenciable en $t=0$ y ? es diferenciable en $t=0$ entonces f no es diferenciable.

2.- Sea $F : R^3 \to R^3$ definida por:

$$F(u,v,w) = \begin{pmatrix} f_1(u,v,w) \\ f_2(u,v,w) \\ f_3(u,v,w) \end{pmatrix}$$

donde $f_i : R^3 \to R$.
Se define la divergencia de F como:

$$divF = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Sea $G : R^3 \to R^3$ definida por:

$$G(r,q,z) = \begin{pmatrix} r\cos q \\ r\sin q \\ z \end{pmatrix}$$

Se define $\hat{r} = \dfrac{\frac{\partial G}{\partial r}}{\left\|\frac{\partial G}{\partial r}\right\|}$; $\hat{z} = \dfrac{\frac{\partial G}{\partial z}}{\left\|\frac{\partial G}{\partial z}\right\|}$; $\hat{q} = \dfrac{\frac{\partial G}{\partial q}}{\left\|\frac{\partial G}{\partial q}\right\|}$ donde $\frac{\partial G}{\partial r}$, $\frac{\partial G}{\partial q}$, $\frac{\partial G}{\partial z}$, representan vectores, los cuales se obtienen derivando parcialmente a G componente a componente.

Considere además $H : R^3 \to R^3$ definida como:

$$H(r,q,z) = h_1(r,q,z)\hat{r} + h_2(r,q,z)\hat{q} + h_3(r,q,z)\hat{z}$$

i) Encuentre $\hat{r}, \hat{q}, \hat{z}$. Deduzca que H se puede escribir como:

$$H(r,q,z) = A_1(r,q,z)\hat{i} + A_2(r,q,z)\hat{j} + A_3(r,q,z)\hat{z}$$

Encuentre explícitamente A_1 , A_2 y A_3.

ii) Demuestre que $divH = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rh_1)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial h_2}{\partial q} + \dfrac{\partial h_3}{\partial z}$

Solución

$$G(r,q,z) = \begin{pmatrix} r\cos q \\ rsenq \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial G}{\partial r} = (\cos q, senq, 0) \Rightarrow \left\|\frac{\partial G}{\partial r}\right\| = 1 \\ \frac{\partial G}{\partial q} = (-rsenq, r\cos q, 0) \Rightarrow \left\|\frac{\partial G}{\partial q}\right\| = r \\ \frac{\partial G}{\partial z} = (0,0,1) \Rightarrow \left\|\frac{\partial G}{\partial z}\right\| = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \hat{r} = (\cos q, senq, 0) \\ \hat{q} = (-senq, \cos q, 0) \\ \hat{z} = (0,0,1) \end{matrix}$$

Luego

$$H(r,q,z) = \left[h_1 \cos q - h_2 senq\right]\hat{i} + \left[h_1 senq + h_2 \cos q\right]\hat{j} + h_3\hat{z}$$

$$A_1(r,q,z) = h_1(r,q,z)\cos q - h_2(r,q,z)senq$$
$$A_2(r,q,z) = h_1(r,q,z)senq + h_2(r,q,z)\cos q$$
$$A_3(r,q,z) = h_3(r,q,z)$$

ii) Notemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad q = arctg(\frac{y}{x})$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos q \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = senq$$
$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{-senq}{r} \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\cos q}{r}$$

Luego

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = \left[\frac{\partial h_1}{\partial r}\cos q + \frac{\partial h_1}{\partial q}(\frac{-senq}{r})\right]\cos q + h_1(-senq)(\frac{-senq}{r}) - \left[\frac{\partial h_2}{\partial r}\cos q + \frac{\partial h_2}{\partial q}(\frac{-senq}{r})\right]senq - h_2\cos q(\frac{-senq}{r})$$
$$\frac{\partial A_2}{\partial y} = \left[\frac{\partial h_1}{\partial r}senq + \frac{\partial h_1}{\partial q}\frac{\cos q}{r}\right]senq + h_1\cos q\frac{\cos q}{r} + \left[\frac{\partial h_2}{\partial r}senq + \frac{\partial h_2}{\partial q}\frac{\cos q}{r}\right]\cos q + h_2(-senq)\frac{\cos q}{r}$$
$$\frac{\partial A_3}{\partial z} = \frac{\partial h_3}{\partial z}$$

Por la tanto la divergencia de H queda

$$divH = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rh_1)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial h_2}{\partial q} + \frac{\partial h_3}{\partial z}$$