UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MAT.

CURSO : MA22A-01 CALCULO EN VARIAS VARIABLES
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR
FECHA: 28 / 08 / 2002 TIEMPO: 3 HORAS

CONTROL #1

1.- Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n. En E se define la función

$N : E \to R$ por: $N(p) = \int_0^1 | p'(t) | \, dt + | p(0) |$

a) Demuestre que N es una norma en E

b) Encuentre $L \in R$ tal que $\forall p \in E \quad N(p) \leq L \cdot Max\, | a_i |$ con $i = 0 , \ldots , n$ donde $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$

c) Sea $M = \{ l p \, / \, l \in R \}$ donde $p(t) = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n$. Determine $M \cap B_N(0,1)$

2.- a) Determine la adherencia e interior de los siguientes conjuntos:

$i) A = \left\{ (x, y) \in R^2 \, / \, x = \frac{1}{n}, n \in \mathrm{N}, \ldots, 0 \leq y \leq 1 \right\}$

$ii) B = \{ (x, y, z) / \, x + y + z = 1; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$

$iii) C = \{ (x, y) \in R^2 \, / \, x^2 - y^2 < 1 \}$

b) En el espacio vectorial $\mathrm{M}_{2x2}(R)$ de las matrices reales de dimensión 2x2 se define:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| \right\}$$

i) Probar que $\|.\|_\infty$ es norma en $\mathrm{M}_{2x2}(R)$.

ii)Estudie la convergencia de la sucesión $\{A_n\}$ definida por:

$$A_n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 1/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.- a) Demuestre que si $A \subset R^n$ es un cerrado o un abierto, entonces $\mathrm{int}(Fr(A)) = f$

¿Es cierto este resultado para cualquier conjunto A? Justifique su respuesta.

b) Sea X un conjunto con dos métricas r y s definidas en él.

1.- Pruebe que $r(x, y) + s(x, y)$ es una métrica.

2.- Suponga que $r(x, y) \leq s(x, y) \ \forall x, y \in X$. Probar que $S \subset X$ es cerrado con respecto a s si éste es cerrado con respecto a r.

c) Estudie el límite de la siguiente función en el origen:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x - y)^2} & si \quad (x, y) = (0,0) \\[2ex] 0 & si \quad (x, y) \neq (0,0) \end{cases}$$