

CURSO: MA22A-02 CALCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR

FECHA: 03 / 09 / 2003

TIEMPO: 3 HORAS

## CONTROL #1

- 1) a) Sea  $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_i \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq n\}$ . Calcular  $Adh(A)$ ,  $IntA$ , y  $Fr(A)$ .
- b) Demostrar que si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un cerrado o un abierto entonces  $\text{int}(Fr(A)) = \emptyset$ .  
¿Es cierto este resultado para cualquier conjunto  $A$ ? Pruébalo o de un contraejemplo.
- c) Sea  $A = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1, x^2 + y^2 > 1/4\} \cup S$ , donde  $S$  es el segmento del eje  $x$  tal que  $1 \leq x < 2$ . Determine si  $A$  es abierto o cerrado y encuentre el interior, la adherencia y la frontera de  $A$ .

2) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en el origen:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1+x-\cos(x^2+y^2)-\arctg(x)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ ó } y \geq x^2 \\ 1 & \text{si } y > 0 \text{ e } y < x^2 \end{cases}$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(x^3+y^2)+x^4}{x^4+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Indicación: Puede ser útil conocer los siguientes límites:  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2}$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \arctg z}{z^3}$$

3) a) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + \sin(y^4)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

- i) Estudie la continuidad de  $f$  en todo su dominio.
- ii) Estudie la diferenciabilidad de  $f$  en todo su dominio.
- iii) Estudie la continuidad de las derivadas parciales de  $f$  en todo su dominio.

b) Sean  $f_1, \dots, f_n : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables. Sea  $\Omega = ]a, b[ \times \dots \times ]a, b[ \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$$

Demuestre que  $f$  es diferenciable en  $\Omega$  y que

$$Df(x)(y) = \sum_{i=1}^n f'_i(x_i) y_i$$