

Guía #1

MA22A – Cálculo en Varias Variables
Semestre Otoño 2004

Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Alfonso Toro
Sebastián Court

Pregunta 1: Sea (X, ρ) un espacio métrico. Pruebe que las siguientes funciones d son métricas en X :

- a) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 2\rho(x, y)$
- b) $\forall x, y \in X, d(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$
- c) $\forall x, y \in X, d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$

Pregunta 2: Sea C el conjunto de todas las funciones reales continuas en $[0, 1]$. Para cada $f, g \in C$ se definen:

$$\rho(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$$

$$\sigma(f, g) = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Gamma(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

- a) Suponga que $f \neq g$. Luego existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $f(t_0) \neq g(t_0)$. Pruebe que existe un intervalo $I \subseteq [0, 1]$ tal que $|f(t) - g(t)| \geq \frac{1}{2}|f(t_0) - g(t_0)|$ para todo $t \in I$. Deduzca que $\sigma(f, g) > 0$ y $\Gamma(f, g) > 0$.
- b) Pruebe que ρ, σ y Γ son métricas en C .

Indicación : Puede serle útil utilizar la desigualdad de Schwarz para integrales:

$$\left(\int_0^1 \phi(t)\psi(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 \phi^2(t) dt \right) \left(\int_0^1 \psi^2(t) dt \right)$$

- c) Pruebe que para todo $f, g \in C$ se tiene:
$$\rho(f, g) \geq \sigma(f, g) \geq \Gamma(f, g)$$

- d) Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea

$$f_n(t) = \begin{cases} 1-nt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

y sea $f(t)=0$ para todo $t \in [0,1]$.

- i. Pruebe que (f_n) converge a f si $n \rightarrow \infty$ en (C, σ)
- ii. ¿Converge (f_n) a f en (C, Γ) ? Justifique.
- iii. Pruebe que (f_n) no converge a f en (C, ρ)

Problema 3: Probar que en todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se tiene que:

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$$

Problema 4: Estudiar si las sucesiones de funciones definidas por:

$$X_n(t) = t^n - t^{n+1}$$

$$Y_n(t) = t^n - t^{2n}$$

Convergen en $C[0,1]$ donde la norma viene dada por $\|x\| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$

Problema 5: Probar que para dos vectores x e y cualesquiera se verifica:

$$\|x\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

Problema 6: Sea la sucesión de funciones $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n < x \leq 1 \end{cases}$$

y sea $f(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$. Se pide responder y fundamentar lo siguiente:

- i) La sucesión converge puntualmente a f ?
- ii) La sucesión converge uniformemente a f ?
- iii) La sucesión converge en L^2 a f ?

Indic. La convergencia en L^2 es con la métrica $d(f, g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

Problema 7: Considere el conjunto $C^1[0,1]$ de todas las funciones reales definidas en $[0,1]$ con primera derivada continua en $[0,1]$. Muestre que :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt$$

define un producto interno en $C^1[0,1]$.

Problema 8: Suponga que V es un espacio dotado de un producto interno, y que u, v, x, y pertenecen a V .

a) Muestre que $\langle u + v, x + y \rangle - \langle u - v, x - y \rangle = 2\langle u, y \rangle + 2\langle v, x \rangle$

b) Deduzca que $4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$

Problema 9: Considere en \mathbb{R}^n la siguiente norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Muestre que $\|\cdot\|_p$ proviene de un producto interno si y solo si $p=2$.

Indicación: Considere $x=(1,1,0,0,0,\dots)$ e $y=(1,-1,0,0,0,\dots)$

Problema 10: Sea (E, d) un espacio métrico donde además E es un espacio vectorial real. Muestre que d proviene de una norma si y sólo si:

a) $d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in E$

b) $d(kx, ky) = |k| d(x, y) \quad \forall x, y \in E \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Indic. Bajo dichas condiciones la norma sería $\|x\| = d(x, 0)$.

Problema 11: Sea $E = [0, \infty[$. Se define una aplicación de $E \times E$ en \mathbb{R} por:

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} \right|$$

i) Muestre que d es una métrica en E .

ii) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión en E definida por $x_n = n$.

¿Es $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en $(E, |\cdot|)$?

¿Es $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en (E, d) ?

Pregunta 12: Sean A y B dos conjuntos no vacíos de puntos de \mathbb{R}^n . Se llama $A+B$ al siguiente conjunto:

$$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$$

Pruebe que si A es abierto y B es cualquier conjunto, entonces $A+B$ es abierto.

Pregunta 13: Si A es un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 , sea $C = A \cap (Q \times Q)$. Hallar $\text{Int}(C)$, $\text{Adh}(C)$ y $\text{Fr}(C)$.

Pregunta 14: Sean A y B dos conjuntos de puntos en \mathbb{R}^n . Hallar la relación de inclusión que liga a $\text{Fr}(A \cup B)$ con $\text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$. Estudiar lo anterior si $\text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B) = \emptyset$.

Problema 15: Sean f y g las siguientes funciones reales de dos variables:

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^2}{1 - \cos x + y}$$

$$g(x, y) = \frac{x^3 - y^2}{1 - \cos x + |y|}$$

Analice la existencia de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$. En caso de existir alguno de los límites, encuentre su valor.

Problema 16: Mediante un cambio a coordenadas polares, calcule el límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ de las siguientes funciones e indique si son continuas o no:

:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(x^3 + y^2) + x^4}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + x \operatorname{sen}(y)}{\sqrt{x^2 + y^2} - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Problema 17: Analice la existencia de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$ de las siguientes funciones:

i. $f(x, y) = \frac{xy^{3/2}}{x^2 + y^3}$

ii. $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

iii. $f(x, y) = \frac{e^{-(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|})}}{|y| + e^{\frac{1}{|x|}}}$

Problema 18: Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en $(0, 0)$:

i) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 |y|^\alpha}{x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{en función de } \alpha)$

ii) $g(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x - y)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

iii)
$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cos y - y \cos x - x + y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
 Recuerde que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$$

Problema 19: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, $a \in \Omega$ y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Para $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset \Omega$, se definen:

$$M(a, f, \delta) = \sup\{f(x) : x \in B(a, \delta)\}$$

$$m(a, f, \delta) = \inf\{f(x) : x \in B(a, \delta)\}$$

Se define, además, la *oscilación* $O(f, a)$ de f en el punto a , como:

$$O(f, a) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta))$$

Demostrar que si f es acotada entonces, f es continua en “ a ” si, y solo si, $O(f, a) = 0$.

Pregunta 20: Calcule el valor de L (si es que existe) en el siguiente límite:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, a)} \frac{(x - y)a^n + (a - x)y^n - (a - y)x^n}{(x - y)(a - x)(a - y)} = L$$

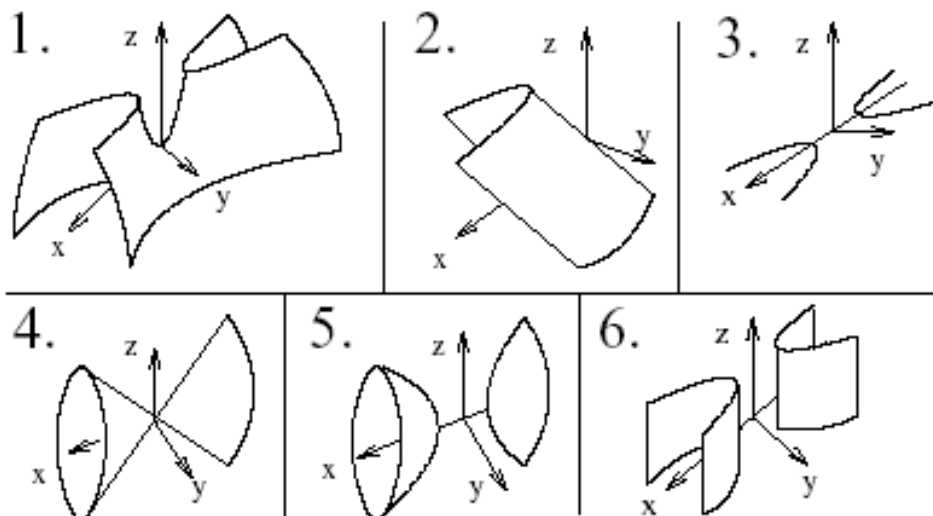
Problema 21: Para cada una de las siguientes ecuaciones en \mathbb{R}^3 , ¿Cual es el gráfico que le corresponde a cada una de ellas? :

$$z = x - y^2$$

$$z = x^2 - y^2$$

$$1 = x^2 - y^2$$

$$z^2 = x^2 - y^2$$



Problema 22: Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x, y) = x + y^2$.

- i) Grafique las curvas de nivel, detalle los casos $c=0$, $c=-1$ y $c=1$
- ii) Grafique la sección de la gráfica de f que se genera al ser ella intersectada por el plano $x=0$.
- iii) Realice lo mismo que en ii) pero cuando se intersecta la gráfica con el plano $y=0$
- iv) Cual de los siguientes dibujos corresponde a la gráfica de f .

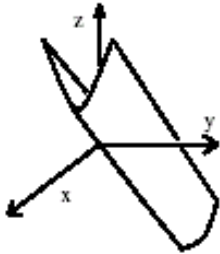


Figure 1

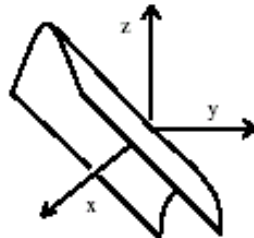


Figure 2

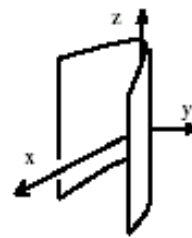


Figure 3

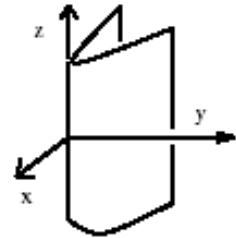


Figure 4