

## Pauta EJERCICIO # 1

### Pregunta 1:

a) Pdq'  $d(x, y)$  es una métrica en  $\mathbb{R}^n$

- Pdq'  $d(x, y) \geq 0$ .

Como  $\|\cdot\| \geq 0$  por ser norma  $\Rightarrow d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Además  $\|\cdot\| < \infty \Rightarrow d(x, y) < \infty$

- Pdq'  $d(x, y) = d(y, x)$

Si  $\|x\| \neq \|y\| \Rightarrow \|x\| + \|y\| = \|y\| + \|x\| \Rightarrow d(x, y) = d(y, x)$

Si  $\|x\| = \|y\| \Rightarrow \|x - y\| = \|y - x\| \Rightarrow d(x, y) = d(y, x)$

- Pdq'  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\Leftarrow$  : Si  $x = y \Rightarrow \|x\| = \|y\| \Rightarrow d(x, y) = \|x - y\| = \|x - x\| = 0$ .

$\Rightarrow d(x, y) = 0$

$\Rightarrow$  :  $d(x, y) = 0$

$\Rightarrow \|x\| + \|y\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \wedge \|y\| = 0 \Rightarrow x = y = 0$

$\Rightarrow \|x - y\| = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

- Pdq'  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Si  $\|x\| = \|y\| = \|z\|$

$\Rightarrow d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$

$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Si  $\|x\| \neq \|y\| \neq \|z\|$

$\Rightarrow d(x, y) = \|x\| + \|y\| = \|x + z - z\| + \|y\| \leq \|x\| + \|z\| + \|-z\| + \|y\| = \|x\| + \|z\| + \|z\| + \|y\| = d(x, z) + d(z, y)$

$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Si  $\|x\| = \|y\| \neq \|z\|$

$\Rightarrow d(x, y) = \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| + 2\|z\|$

$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Si  $\|x\| \neq \|y\| = \|z\|$

$\Rightarrow d(x, y) = \|x\| + \|y\| = \|x - z + z\| + \|y\| \leq \|x - z\| + \|z\| + \|y\| = d(x, z) + d(z, y)$

$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

ii. Si  $d$  proviene de una norma entonces se cumple:

$$d(x+z, y+z) = d(x, y)$$

$$d(kx, ky) = |k|d(x, y)$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$$

Usaremos un contraejemplo:

$$\text{Consideremos } \|\cdot\| = \|\cdot\|_1, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } z = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notemos que  $\|x\|_1 = 1$ ,  $\|y\|_1 = 3$ ,  $\|x\|_1 \neq \|y\|_1$  y que por lo tanto  $\|x\|_1 + \|y\|_1 = 4$

$$\text{Además } x+z = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ entonces } \|x+z\|_1 = 9$$

$$\text{Por otro lado, } y+z = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ entonces } \|y+z\|_1 = 11$$

Como  $\|x\|_1 \neq \|y\|_1$  usaremos  $d(x, y) = \|x\|_1 + \|y\|_1$ , entonces debiera cumplirse  $\|x+z\|_1 + \|y+z\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$

Es decir,  $9+11 = 1+3$ , lo que nos lleva a  $20 = 4$ , que es una contradicción.

$\Rightarrow d$  no proviene de una norma.

iii.  $n = 2$ ,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$

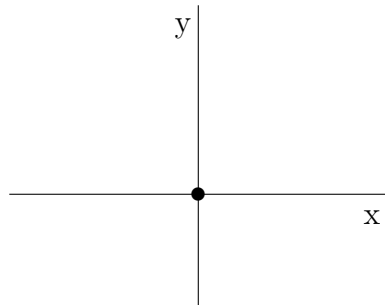
$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(a, x) < r\}$$

$$B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(a, x) \leq r\}$$

- $a = (0, 0)$

$$\text{Si } \|a\| = \|x\| \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$$

$$\Rightarrow B((0, 0), r) = B[(0, 0), r] = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \forall r > 0$$



Si  $\|a\| \neq \|x\|$ ,  $d(x, y) = \|x\|_1 + \|y\|_1$   
 Como  $\|a\|_1 = 0 \Rightarrow d(a, x) < r \Rightarrow \|x\| < r$

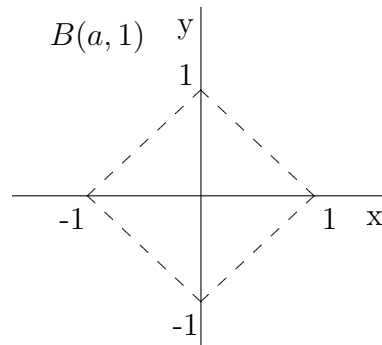
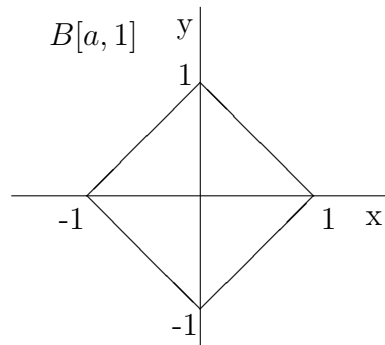
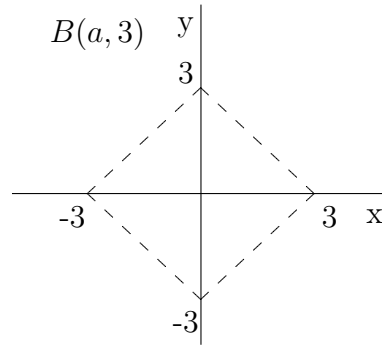
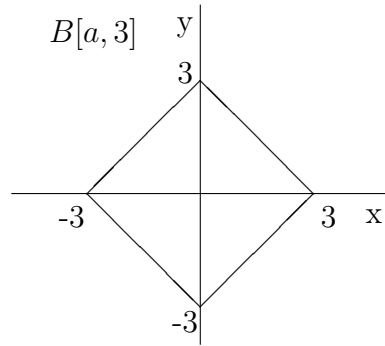
$$B(a, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\}$$

$$B[a, 1] = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$$

$$B(a, 3) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 3\}$$

$$B[a, 3] = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 3\}$$

Los 4 dibujos siguientes no incluyen el punto  $(0, 0)$



- $a = (1, 1)$

$$\text{Si } \|a\| \neq \|x\| \Rightarrow d(x, y) = \|x\| + \|y\|$$

$$\Rightarrow d(a, x) = 2 + \|x\|_1$$

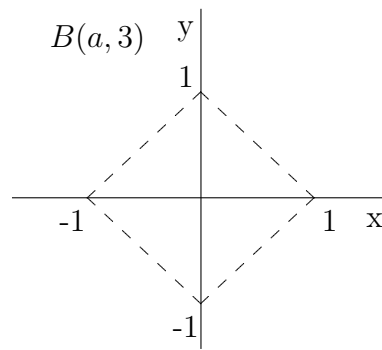
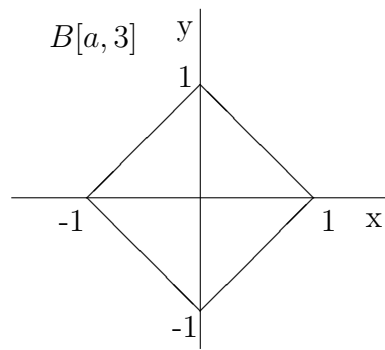
$$\Rightarrow d(a, x) = 2 + \|x\|_1 < r \Rightarrow \|x\|_1 < r - 2$$

$$B(a, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < -1\} = \phi$$

$$B[a, 1] = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq -1\} = \phi$$

$$B(a, 3) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\}$$

$$B[a, 3] = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$$



Si  $\|a\|_1 = \|x\|_1 \Rightarrow d(x, y) = \|x - y\|_1$

$\|a\|_1 = 2 \Rightarrow \|x\|_1 = 2$

$d(a, x) = |1 - x_1| + |1 - x_2|$

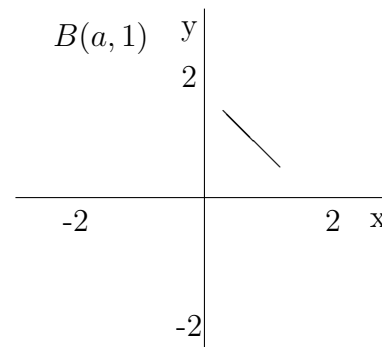
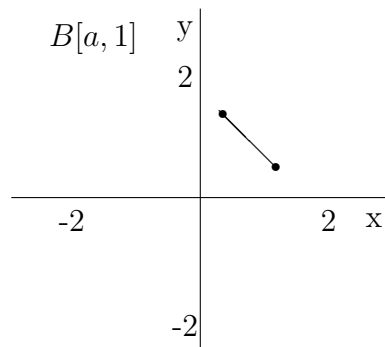
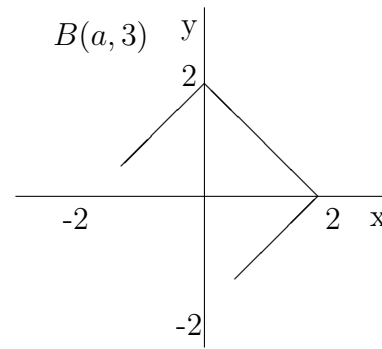
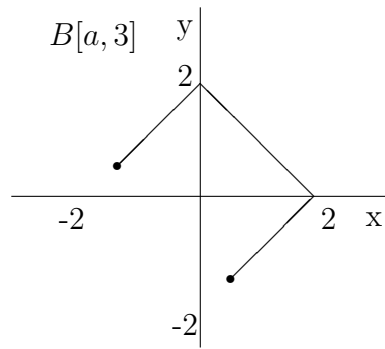
$\Rightarrow d(a, x) < r \Rightarrow |1 - x_1| + |1 - x_2| < r$

$B(a, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |1 - x_1| + |1 - x_2| < 1, \|x\|_1 = 2\}$

$B[a, 1] = \{x \in \mathbb{R}^2 : |1 - x_1| + |1 - x_2| \leq 1, \|x\|_1 = 2\}$

$B(a, 3) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |1 - x_1| + |1 - x_2| < 3, \|x\|_1 = 2\}$

$B[a, 3] = \{x \in \mathbb{R}^2 : |1 - x_1| + |1 - x_2| \leq 3, \|x\|_1 = 2\}$



## Pregunta 2:

- a) Como  $K_p \neq \emptyset \forall p \in \mathbb{N}$ , escojamos  $x_p \in K_p \forall p \in \mathbb{N}$ .  
Consideremos la sucesión  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$   
Como  $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_p \Rightarrow \{x_p\} \subseteq K_1$  compacto  
 $\Rightarrow$  tiene un punto de acumulación  $x_0 \in K_1$  (por ser cerrado)  
Para  $p \in \mathbb{N}$  cualquiera, la sucesión  $\{x_k\}$  tiene infinitos puntos en cada  $K_i \forall i \geq p$   
 $\Rightarrow x_0$  (pto.acumulación)  $\in K_i$  (compacto)  
 $\Rightarrow \exists$  subsucesión  $\{x_{\alpha(n)}\}$  convergente a  $x_0$   
Por lo tanto,  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $x_0 \in K_i$ ,  $\forall i \geq p$   
Luego,  $x_0 \in K_i \subseteq K_{i-1} \subseteq \dots \subseteq K_1 \Rightarrow x_0 \in \cap K_i$

Por lo tanto  $\cap K_i \neq \emptyset$

- b) Supongamos que existen dos:  
Sean  $x_0, y_0 \in \cap K_i \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} \quad x_0, y_0 \in K_i$   
 $\Rightarrow \|x_0 - y_0\| \leq \sup \|x - y\| = \delta(K_i) \rightarrow 0$   
 $\|x_0 - y_0\| = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$

$\Rightarrow \text{Card } \cap K_i = 1$